Public Finance Research Papers

Dipartimento di Studi Giuridici
Filosofici ed Economici

Istituto di Economia e Finanza

Sapienza
Università di Roma

Public Finance Research Papers

Il paradosso di S. Pietroburgo, una rassegna

RUGGERO PALADINI

E-PFRP N. 29

2017

Ruggero Paladini

Università Sapienza di Roma

Dipartimento di Studi Giuridici, Filosofici ed Economici

Email: ruggero.paladini@uniroma1.it

Please cite as follows:

Ruggero Paladini (2017), "IL PARADOSSO DI S. PIETROBURGO, UNA RASSEGNA", *Public Finance Research Papers*, Istituto di Economia e Finanza, DIGEF. Sapienza University of Rome, n.29.

(http://www.digef.uniroma1.it/ricerca)

E-PFRP N. 29

2017

Ruggero Paladini

IL PARADOSSO DI S. PIETROBURGO, UNA RASSEGNA

"Today we have a whole zoo of probability interpretations. We have propensity interpretations, frequency interpretations, objective Bayesian interpretations, subjective Bayesian interpretations, logical interpretations, personalistic interpretations, classical interpretations, formalist interpretations and so on, almost without end. These interpretations claim that the ontology of probability is either physical, psychological, epistemic, logical or mathematical. Some of them view probability as objective, others as subjective. Some even go to the extreme and say that probability is merely an empty word that we are allowed to interpret in any way we want, as long as we do not violate the axioms of probability.
*To understand why we have this wild bouquet of philosophical interpretations it is necessary to study history. The cause of the confusion is an old gambling problem called the St. Petersburg paradox. As this problem is still unsolved, it continues to infuse confusion" (*Ergodos 2014).

Abstract

In 1738 Daniel Bernoulli presented for the first time a study with a functional relationship between utility and wealth. The goal was to provide a solution to a "curious" paradox on probability theory. Almost three centuries after the St. Petersburg paradox is still debated. Two strands of research can be identified: the first, both theoretically and with surveys, examines the reasons for the subjective behavior of a player who is not willing to offer, if not a modest sum, to play a game that has an infinite expected value. The second one is the analysis by computer simulations of a large number of games, where unexpected statistical distributions emerge. From all of the studies it turns out that not only players offer very modest figures, but also that no gambling house will ever offer a St. Petersburg game.

JEL classification codes: B12, C18, D81.

Keywords: expected value, utility function, fractal distributions.

E-PFRP N. 29

2017

Premessa.
La teoria della probabilità vede l'alba nel XVII° secolo, ad opera di matematici (Fermat, Pascal), fisici (Huygens), filosofi (Leibniz)[1]. Durante il secolo dei lumi esce, nel 1708, *Essai d'Analyse sur le jeux de hazards* ad opera del matematico Pierre de Montmort e nel 1713 *Ars conjectandi* di Jacob (James) Bernoulli. Uno dei concetti chiave che viene elaborato è quello di speranza matematica, dal francese *espérance*[2]*.* Come esemplificò Huygens[3] se qualcuno con tre monete in una mano e sette nell'altra mi chiede di scegliere, il valore atteso è cinque, cioè (3+7)/2, anche se dopo la scelta mi troverò o con tre o con sette monete. Quello che diverrà noto come il paradosso di San Pietroburgo prende questo nome perché sembra emergere una contraddizione tra un valore atteso infinito ed il fatto che nessuna persona assennata sarebbe disposta a puntare somme anche solo moderatamente elevate.

Per lungo tempo il dibattito sul paradosso fu limitato ai matematici, ma subito dopo la seconda guerra mondiale la funzione di utilità attesa (EU) di John von Neumann e Oskar Morgenstern richiamò l'attenzione degli economisti sulle scelte in condizioni di incertezza. Da quel momento un crescente numero di economisti, matematici e fisici, ma anche psicologi cognitivi e neuro-economisti hanno scritto sul tema, che dopo tre secoli attira ancora gli studiosi. Si possono individuare, nella moltitudine di scritti sul tema, due filoni principali: il primo si concentra sulla psicologia del giocatore, che lo porta a non ragionare in termini di valore atteso, il secondo cerca di individuare il prezzo equo di un (ipotetico) gioco ripetuto molte volte.

1. *Un problema curioso.*

Nel 1713 Nicholas Bernoulli propose cinque problemi di probabilità a Pierre de Montmort; il quinto era il seguente: "A promette a B di dargli delle monete nella progressione 1, 2, 4, 8, 16 etc…"[4]. A darà a B un euro se esce testa al primo lancio, due euro al secondo, quarto al terzo e così via. Il valore atteso (o speranza matematica) sarà allora la metà di uno più un quarto di due più un ottavo di quarto e così via. Cioè

[1] Possiamo aggiungere anche Girolamo Cardano, con il suo *Liber de Ludo Aleae*, scritto nel 1525 e riveduto nel 1965 (Bernstein 1996), e Galileo Galilei, con il suo *Sopra le scoperte dei dadi* del 1596. E' ben nota la discussione che si sviluppò tra Fermat e Pascal, stimolata da quesiti posti a Pascal da Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, un nobile con la passione per il gioco d'azzardo. Il tema di come dividere la posta di un gioco interrotto compare per la prima volta nell'opera di Luca Paccioli, *Summa de arithmetica geometria* (1509).

[2] O anche valore atteso dall'inglese *expected value*.

[3] Nel suo saggio del 1657, *De ratiociniis in ludo aleae.*

[4] Nella lettera vengono proposte altre progressioni più accentuate, ma la discussione si svilupperà sulla prima; in seguito la progressione partirà da 2 invece che da 1, in modo da dare la sommatoria 1+1+1+1…..

1/2+1/2+1/2+1/2…… all'infinito. Bernoulli aggiungeva che anche se per la maggior parte quei problemi non erano difficili, Montmort avrebbe trovato "qualcosa di molto curioso". Il qualcosa era che, di fronte ad un valore infinito B, cioè una comune persona dotata di normale buon senso, non sarebbe disposto a pagare più di una decina di euro per giocare con A (A e B verranno chiamati da Daniel Bernoulli rispettivamente Petrus e Paulus, cioè, nella versione inglese, Peter e Paul). Vi è in sostanza una divergenza netta tra analisi matematica e senso comune.

Montmort rispose alla lettera di Nicholas Bernoulli dicendo che il problema non sembrava porre soverchie difficoltà; in effetti risultò invece il contrario, suscitando un dibattito animato, che dura tuttora. L'ipotesi più nota è quella del cugino Daniel Bernoulli, che si trovava a San Pietroburgo, dove pubblicò sugli annali dell'Accademia un lavoro[5] (Bernoulli 1738) nel quale si proponeva una soluzione del "paradosso", attraverso la distinzione tra aspettativa matematica ed aspettativa "morale".

Nel suo lavoro Bernoulli citava l'opinione avanzata dal matematico svizzero Gabriel Cramer, il quale, sulla base della distinzione tra le due aspettative, aveva ipotizzato, in una lettera al fratello Nicholas del 1728 una funzione di utilità data dalla radice quadrata del reddito. In quella stessa lettera Cramer aveva anche ipotizzato che oltre una certa cifra, come 2^{24}, cioè circa 17 milioni, l'utilità marginale (per usare la terminologia moderna) divenisse zero (Pulskamp 2013)[6].

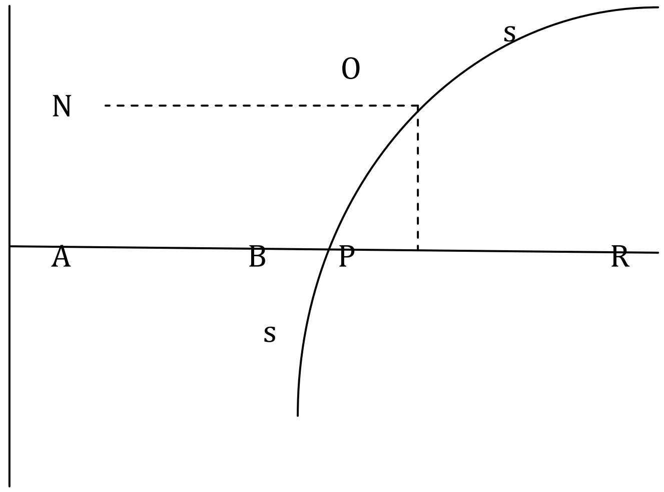
Tornando a Daniel Bernoulli, egli scrive per la prima volta[7] una funzione dell'utilità rispetto alla ricchezza (cioè alla quantità di beni posseduta), per la precisione una funzione logaritmica, nella forma $y= k\log x$, dove (usando terminologia moderna) y è l'utilità e x la ricchezza (o il reddito). La funzione logaritmica ha infatti proprietà tali per cui la derivata dell'utilità rispetto alla ricchezza (o al reddito, cioè quella che sarà successivamente chiamata l'utilità marginale del reddito) è inversamente proporzionale rispetto al livello della ricchezza (ovvero il prodotto tra derivata e la variabile indipendente è costante, quindi geometricamente si tratta di un'iperbole equilatera). Nel suo lavoro Bernoulli presenta un grafico in cui la curva logaritmica viene disegnata su due quadranti cartesiani

---

[5] Nella traduzione inglese vi sono alcune note di Karl Menger (1934, figlio di Carl, uno dei padri della rivoluzione marginalista), autore di un approfondito studio sul paradosso di Bernoulli.

6 Stranamente Bassett (1987) sostiene che Cramer non abbia avanzato l'ipotesi di una funzione di utilità "bounded", criticando vari autori, da Savage ad Arrow. Probabilmente non aveva avuto modo di leggere la lettera di Cramer che è molto chiara.

[7] Nel senso che la prima pubblicazione è stata quella di Daniel Bernoulli. Anche Eulero, in un manoscritto non pubblicato, aveva avanzato l'ipotesi di una funzione di utilità (Sandifer 2007).



Sull'ascissa abbiamo la ricchezza e sull'ordinata l'utilità; AB, afferma Bernoulli, rappresenta la ricchezza iniziale mentre BP un incremento (rischioso) di ricchezza avente un'utilità pari a PO. Questo tipo di grafico è largamente noto nei testi in cui viene spiegata la funzione di utilità von Neumann-Morgenstern.

All'inizio dell'articolo Bernoulli presenta il seguente esempio: "Somehow a very poor fellow obtains a lottery ticket that will yield with equal probability either nothing or twenty thousand ducats. Will this man evaluate his chance of winning at ten thousand ducates? To me it seems that the answer is in the negative". On the other hand I am inclined to believe that a rich man would be ill-advised to refuse to buy the lottery ticket for nine thousand ducats". Per spiegare questo passo Bernoulli afferma che nella ricchezza, intesa come tutto ciò che può soddisfare qualunque tipo di desiderio (compresi, sottolinea, i beni di lusso), va compresa anche la capacità produttiva, sicché si può dire che praticamente la quasi totalità delle persone possiede una certa ricchezza, e che quindi la funzione di utilità abbia una valenza generale. Inoltre Bernoulli afferma che se l'incremento di ricchezza incerto è relativamente piccolo rispetto al livello di ricchezza iniziale, il tratto corrispondente sulla curva ss diviene lineare. Quindi mentre per il povero novemila ducati sicuri hanno un valore maggiore di diecimila probabilistici, per il ricco la situazione si capovolge.

Se scriviamo la funzione come U = $a\ln(W+x)+c$, dove W è la ricchezza iniziale, x la vincita a seconda del tiro della moneta, a e c numeri, e se per semplificare poniamo $W, c =0$ e $a=1$, otteniamo il valore di $2\ln(2)=1,39$; valore curiosamente molto vicino[8] al valore della teoria "mediana" del paradosso, che vedremo più avanti.

---

[8] Se consideriamo realisticamente redditi (meglio della ricchezza) positivi, si nota che il prezzo limite che Paul è disposto ad offrire cresce; tuttavia la sensibilità di tale prezzo all'aumento del reddito è molto scarsa: con redditi di 8.000 euro il prezzo

La tesi di Daniel Bernoulli verrà ripresa da Marshall (1890), discussa da Menger (1934) e soprattutto otterrà un notevole successo come anticipazione della teoria dell'utilità attesa (EU) di von Neumann-Morgenstern[9].

2. *I primi tentativi.*

Il paradosso di St. Pietroburgo diede luogo ad una accesa discussione tra autorevoli scienziati; Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1761) criticò la tesi di Bernoulli, la quale invece fu accettata da Pierre Simon Laplace, nel suo classico trattato sulla probabilità[10]. d'Alembert formulò delle ipotesi che farebbero inorridire chiunque abbia qualche nozione di calcolo delle probabilità[11]; ad esempio che se si lancia una moneta (ben bilanciata) ed esce croce, la volta dopo la probabilità di avere testa non è 0,5, ma leggermente di più, e se al secondo lancio esce di nuovo croce, al terzo la probabilità di avere testa sarà ancora un po' più alta, e così via[12].

Una seconda ipotesi più sensata di d'Alembert era quella secondo cui quando le probabilità diventano troppo piccole, vengono considerate pari a zero. In questo caso si sta introducendo un elemento che riguarda la psicologia del giocatore. La possibilità che escano dieci croci di seguito è una su 1024, ma quella che escano venti croci è una su (poco oltre) un milione. Questa ipotesi era stata avanzata anche da Nicolas Bernoulli in una lettera al fratello, in aggiunta all'utilità marginale decrescente. Questa idea dell'azzeramento di probabilità piccolissime, ma non nulle, che vedremo più avanti, verrà in qualche modo ripresa dalle funzioni NEU (Non Expected Utility) che contrastano la teoria dell'EU (Expected Utility).

Georges-Louis Leclerc, Compte de Buffon (1777), il celebre naturalista, si occupò in alcuni saggi di probabilità e del paradosso di St. Pietroburgo e avanzò in pratica tutte le ipotesi che sarebbero state poi sviluppate in seguito: oltre all'utilità marginale decrescente[13], il fatto che il bookmaker non ha una ricchezza infinita, che il gioco non può durare all'infinito, che le probabilità da uno su diecimila in poi sono da considerare nulle. Ma fece anche una cosa che nessun altro studioso aveva fatto: un esperimento. Incaricò un ragazzo di lanciare

limite è circa 13, ma se il reddito raddoppia, quadruplica o più, il prezzo aumenta di poche unità.

[9] In alcuni lavori la funzione di utilità attesa è definita funzione bernoulliana.

[10] Si veda Daston 1988, pp. 76-108.

[11] Samuelson (1977) la definisce come "d'Alembert aberration".

[12] Del resto d'Alembert pensava che su due lanci le probabilità di avere due teste o due croci o una testa ed una croce fossero pari ad un terzo. Cordoncet, che era un suo seguace, su questo si dichiarò, giustamente, in disaccordo (Daston 1988).

[13] Buffon propose anche una funzione del tipo: $y=x/(a+x)$, dove a è la ricchezza iniziale e x il guadagno atteso.

una moneta, osservando quante volte "testa" usciva al primo lancio, quante al secondo e così via, fino a 2048 giochi.

Fece la somma dei risultati con payoff che andavano da un Ecù (la moneta del tempo) al primo lancio, due al secondo, quattro al terzo, e così via. Quindi 1061x1+494x2+232x4……=10.057

I risultati di Buffon

Numero di lanci	Esiti	Payoff
1	1061	1
2	494	2
3	232	4
4	137	8
5	56	16
6	29	32
7	25	64
8	8	128
9	6	256

Perché Buffon costrinse il ragazzo a lanciare 4040 volte (1061x1+494x2+232x3…..) la moneta in aria per ottenere 2048 esiti[14]? Bè perché 2048 è 2 elevato alla undicesima. Voleva un numero da confrontare con una distribuzione teorica come la seguente:

Distribuzione secondo le probabilità a priori

Numero di lanci	Esiti	Payoff
1	1024	1
2	512	2
3	256	4
4	128	8
5	64	16
6	32	32
7	16	64
8	8	128
9	4	256
10	2	516
11	1	1024

Il payoff complessivo sarebbe 1024x11 = 11264, ma in realtà manca ancora un lancio per arrivare a 2048. Buffon attribuì al primo lancio, per cui invece di 1024 ottenne 1025 e un payoff complessivo di

[14] 4040 è poco meno di 4096, che dovrebbe essere il numero di lanci nel caso in cui la distribuzione seguisse esattamente le probabilità a priori. Infatti in questo caso "testa" dovrebbe uscire in media al secondo lancio.

11265. In questo caso il payoff medio sarebbe stato pari a 5,5 (11265/2048) invece di quello che aveva ottenuto di 4,91 (10057/2048)[15]. Dunque un 12% in più.

Buffon si dichiarò soddisfatto dell'esperimento, ritenendo che fornisse una spiegazione del paradosso, e concludendo che 5 unità (ducati o altro) fossero un prezzo equo per l'ipotetico gioco. Non si soffermò sulla verifica del fatto che il ragazzo avesse tirato in modo random la moneta e che questa fosse ben bilanciata. In effetti sui 4040 lanci, necessari per i 2048 esiti, "testa" uscì il 50,7% delle volte, una percentuale del tutto plausibile, senza la necessità di ricorrere al chi quadro[16]. Ma il chi quadro del confronto completo tra la distribuzione empirica e quella teorica (con la piccola aggiunta di Buffon) dà 16,2 con 10 gradi libertà; una discrepanza notevole, che secondo uno studio (Foley 2010) Buffon avrebbe ottenuto, ripetendo l'esperimento, con probabilità solo del 14%[17].

Non solo, ma volendo mantenersi aderente alla distribuzione di probabilità a priori, Buffon avrebbe dovuto ipotizzare che l'ultimo gioco uscisse al dodicesimo lancio, portando il prezzo medio a 6,5[18]. Questo tema verrà ripreso più avanti.

Per la verità il problema era stato presentato da Nicholas e Daniel Bernoulli come un "Gedanken Experiment" giocato da Paul nei confronti di Peter, una volta sola[19]. Ma l'esperimento di Buffon aveva aperto la strada ad una ripetizione X volte del lancio della moneta (o del dado con esiti pari o dispari, come nell'esempio di Eulero). Nicolas de Condorcet[20] decise di liberarsi del problema dell'infinito, fissando un

---

[15] La differenza tra 5,5 e 4,91 medi significa 1208,32 in totale. Se Peter e Paul avessero scommesso con premio medio di 4,91 e fosse uscito il risultato con vincita media di 5,5 Peter avrebbe perso una discreta somma. Il contrario con premio a 5,5 e risultato medio a 4,91. Queste cifre raddoppiano nel caso in cui la vincita al primo tiro fosse 2 invece di 1.

[16] Tuttavia analizzando il lancio di una moneta (Diaconis et. al. 2007) si è notato che se la moneta è lanciata sempre dallo stesso lato, la probabilità che esca quel lato è del 51%. Ma ovviamente non sappiamo se il ragazzo metteva sempre la moneta con "testa" verso l'alto.

[17] La ragione è semplice: nell'esperimento di Buffon il ragazzo ha ottenuto "testa" al massimo al nono lancio (sei volte), mentre una distribuzione più vicina alla probabilità a priori avrebbe portato a tre risultati, due con dieci lanci e uno con undici; quindi il payoff complessivo sarebbe stato più alto.

[18] Ovvero, nell'ipotesi che viene usata ora, cioè partendo da un premio di 2 al primo lancio, a 13.

[19] Si ricorda che Paul e Peter sono il giocatore e la casa da gioco nella presentazione di Daniel, e così sono sempre stati chiamati nella letteratura. Come accennato Nicholas aveva usato A e B.

[20] In una serie di memorie sul calcolo delle probabilità, tra il 1784 e il 1787 (Granger 1956). Condorcet era stato allievo di Fontaine e amico di d'Alembert, ed entrambi si erano occupati del problema.

limite N al numero di lanci, ottenendo quindi dei valori attesi finiti; s'interessò quindi a quale fosse il premio "equo" di un gioco ripetuto numerose volte, con un numero finito N di lanci (Jorland 1987). Applicando la legge dei grandi numeri formulata da un altro Bernoulli, Jacob[21] (1713), zio di Daniel, Condorcet stabilisce il premio equo come N/2 +1, ricordando che solo quando il gioco viene ripetuto numerose volte si può applicare la legge dei grandi numeri. Più avanti verrà chiarito e integrato il ragionamento di Condorcet.

Anche questo filone verrà ripreso, dopo la seconda guerra mondiale, e troverà un crescente numero di ricercatori che si serviranno dei computer, raggiungendo miliardi di simulazioni. Uno dei primi contributi, teorico, che verrà descritto più avanti, è quello di Feller (1945, 1950).

3. *Il gioco ripetuto.*

Torniamo ora all'ipotesi di un solo gioco, secondo la versione originale del paradosso. La soluzione del paradosso da parte di Bernoulli, come si è accennato, consisteva nel considerare la psicologia di Paul, cioè le sue aspettative "morali", in modo tale da spezzare la simmetria tra probabilità di avere "testa" all'ennesimo lancio, continuamente decrescente, bilanciata dal valore della vincita continuamente e simmetricamente crescente; prendendo il logaritmo della vincita la serie (che rimaneva infinita) diveniva così rapidamente decrescente da convergere ad un valore finito (e piccolo).

Un'altra ipotesi consisteva nel troncare la serie dopo un dato numero N* di lanci, ottenendo quindi automaticamente un valore finito. Le ragioni addotte sono di due tipi. Nel primo caso si considera quanto Peter sia disposto a rischiare, al limite tutta la sua ricchezza. Per quanto Peter possa essere un banco dotato di ampie risorse, queste sono necessariamente finite. Questa motivo, già accennato da Buffon, fu sviluppato da Siméon Denis Poisson nel 1837 (Neugebauer 2011) il quale sostenne che se la dotazione di Peter è 2^N, il prezzo equo per il gioco è N, o N/2 se il gioco parte da una unità monetaria. La cifra è inferiore di un'unità a quella indicata da Cordoncet, che, come vedremo più avanti, è più corretta.

Il primo che sviluppò un'analisi matematica, ma non empirica, del gioco con N lanci fu però Alexis Fontaine (1764), che precedette quindi Buffon. La memoria, presentata all'Accademia reale delle Scienze, si trova sul web in una traduzione in inglese[22] del 2009. Si tratta di due paginette senza nessun riferimento a Bernoulli. Fontaine parte dal

---

[21] O Jacques o anche James Bernoulli, famoso per il suo lavoro apparso postumo *Ars Conjectandi* nel 1713.

[22] Da parte di Richard Pulskamp, Department of Mathematics and Computer Science, Xavier University, Cincinnati, OH.

valore che Pierre (ovvero Peter) mette sul tavolo, nell'esempio un milione di ecù. In questo modo si determina il numero di lanci, 18[23], e il prezzo equo del gioco da parte di Paul, 10,14, un prezzo leggermente maggiore di quello che indicherà Poisson.

Il limite posto al numero dei lanci dalla ricchezza del bookmaker (Peter) è un limite di tipo oggettivo; ma il limite può essere anche soggettivo, da parte di Paul, nel senso che il giocatore può non credere che esca sempre "croce" per un (più o meno) elevato numero di lanci. Si tratta di una impossibilità morale, che secondo Nicholas Bernoulli[24] costituisce la vera ragione del fatto che Paul non sia disposto a puntare più di una certa somma (o che, come scrive Daniel, è più che disposto a vendere il diritto al gioco per venti ducati). Il concetto d'impossibilità morale era stato introdotto da Jacob (or James) Bernoulli nella sua *Ars Conjectandi*, come reciproco della certezza morale, cioè una probabilità così alta da essere praticamente equivalente alla certezza totale. La percentuale sotto la quale il giocatore considera nulla la probabilità non è ovviamente definibile a priori. Nicholas nella lettera a Cramer indica 1/64 o meno (cioè probabilità più bassa) come soglia. In altre parole Paul non considererebbe realistico che escano cinque "croci" di seguito prima che esca "testa".

Che 1,56% venga approssimato a zero può sembrare azzardato. Ad esempio d'Alembert pose lo zero a 1/128, permettendo che (Paul pensi che) vi sia la possibilità che "testa" esca al sesto lancio. Buffon spostò decisamente il limite a 1/10.000 cioè 0,01%; in effetti in sei casi il ragazzo aveva ottenuto "testa" al nono lancio, che era risultato in numero di lanci più alto, per cui azzerare la possibilità che possano uscire più di quattordici "croci" doveva essere sembrato a Buffon del tutto plausibile.

L'impossibilità morale va peraltro distinta dall'impossibilità fisica; d'Alembert aveva definito metafisicamente possibile, ma fisicamente impossibile, eventi come cento "croci" di seguito. Questa idea verrà sviluppata a metà dell'ottocento da Augustin Cournot (1843), ben noto agli economisti. Cournot disse che anche se in teoria un cono pesante può reggersi in equilibrio sul suo vertice, non si vedrà mai un caso del genere. Quello che fu definito il lemma di Cournot ha interessato famosi probabilisti, da Markov a Borel, ma è stato poi eclissato con l'affermarsi dell'impostazione soggettiva della probabilità (Shafer 2006)[25]. Come

---

[23] Fontaine suppone che l'uscita di "testa" al primo lancio faccia guadagnare un ecù. Se si suppone di partire da due ecù, allora i lanci devono essere 19.

[24] Lettere a Cramer del 1728 e a Daniel del 1732.

[25] Va detto però che tutto il filone della termodinamica (entropia ecc…) si basa sulla impostazione di Boltzmann, che in essenza è di tipo probabilistico. Per banalizzare se versiamo in un recipiente dell'acqua calda e fredda, dopo un congruo margine di tempo vedremo che la temperatura sarà divenuta uniforme. Ma se osserviamo un recipiente con acqua alla stessa temperatura ovunque, potremmo attendere tutta la vita dell'universo e non vedremo apparire temperature diverse, cioè le molecole di

vedremo l'impossibilità morale avrà invece sviluppi importanti come spiegazione del paradosso di Pietroburgo.

4. *La funzione di utilità*.

Con la rivoluzione marginalista di Jevons, Menger e Walras il concetto di utilità marginale diviene un aspetto centrale nelle teorie degli economisti, definiti appunto marginalisti. Tra questi Marshall (1890) accoglie la specifica funzione proposta da Daniel Bernoulli, presentando però nel seguente modo: "the satisfaction which a person derives from his income as commencing when he has enough to support life, and afterwards as increasing by equal amounts with every equal successive percentage that is added to his income". Nell'appendice VIII, definita *y* l'utilità (happiness) e *x* il reddito, Marshall scrive in forma differenziale $xdy/dx = K$ ed in forma integrale $y = Klogx + C$ (*K e C* costanti). Aggiunge poi: "Further with Bernoulli let us assume that, a being the income wHich affords the barest necessities of life, pain exceeds pleasure when the income is less than a, and balances it when the income equals a; then our our equation becomes $y = Klog(x/a)$". Marshall dunque sembra interpretare il grafico di Bernoulli come se il segmento AB identifichi il livello di reddito di sussistenza a; se *x* è più piccolo, l'utilità *y* è negativa, se è più grande è positiva. Ma, come abbiamo visto, Bernoulli intendeva una cosa piuttosto diversa: il segmento AB è semplicemente il livello iniziale della ricchezza dell'individuo. Ora, come dice anche Marshall, il punto non è se la funzione si debba riferire al reddito o alla ricchezza; il punto è che Bernoulli considera come ricchezza anche quella potenziale di un lavoratore (o perfino di un ladro, come afferma esplicitamente), probabilmente per fare sì che la sua funzione potesse estendersi alla totalità delle persone, mentre il concetto di minimo di sussistenza gli è estraneo.

Probabilmente Marshall si era ispirato alla teoria Weber-Fechner sviluppatati nell'ambito degli psicologi sperimentali; Weber aveva avanzato l'ipotesi che ogni incremento appena percepibile di uno stimolo fosse proporzionale allo stimolo stesso, e Fechner aveva sviluppato l'idea scrivendo la funzione logaritmica $dS = Clog(dR/R_o)$, dove S è la sensazione, R lo stimolo, ed R_o la soglia avvertibile della sensazione. La funzione proposta da Marshall costituisce quindi un raffinamento dell'idea di Bernoulli, che dovrebbe essere definita come la Bernoulli-Marshall (Paladini 2013).

acqua più veloci raggrupparsi in un lato e quelle più lente nell'altro. Per chi fosse interessato agli sviluppi moderni, si consiglia Villani 2012, un libro che racconta gli sforzi del matematico francese sui temi di Boltzmann, coronati dalla medaglia Fields.

5. *Keynes on probability*.

Anche John Mainard Keynes (1921) si occupò del paradosso di St. Pietroburgo; come scrisse Samuelson[26] (1977) "Keynes never touched a subject without contributing something to it, but….". Mentre la teoria delle probabilità (logico-relazionista) enunciata da Keynes oggi è di interesse soprattutto storico, il concetto di rischio sul quale insiste Keynes è interessante dal punto di vista che riguarda il tema del paradosso.

Il concetto di rischio di Keynes è il seguente: "If A is the amount of good which may result, p its probability ($p+q=1$), and E the value of the 'mathematical expectation', so that $E=pA$, the the 'risk' is R, where $R=p(A-E)=p(1-p)A=pqA=qE$. This may be put in another way: E measures the net immediate sacrifice which should be made in the hope of obtaining A; q is the probability that this sacrifice will be made in vain; so that q is the 'risk'".

Dopo aver dato questa definizione, Keynes passa a descrivere il paradosso, e accenna alle varie soluzioni proposte[27]. La sua conclusione è salomonica: "we are unwilling to be Paul, partly because we do not believe Peter will pay us if we have good fortune in the tossing, partly because we do not know what we should do with much money ….if we won it, and partly because we do not think it would be a rational act to risk an infinite sum or even a very large sum for an infinitely larger one, whose attainment is infinitely unlikely".

L'impostazione di Keynes viene considerata come una anticipazione del modello rendimento-rischio di Markovitz. In effetti però non è facile adottare l'approccio di Keynes al problema in questione[28]. E ha infatti un valore infinito, e altrettanto R. Quello che si può dire è che se 2 (ducati, dollari, euro…) è il premio nel caso in cui esca "testa" al primo lancio, offrire un premio di 2 implica zero rischio. Se Paul offre di più, incomincia ad avere un rischio che aumenta, tanto più quanto più aumenta l'offerta. L'idea di Keynes potrebbe avere qualche relazione con le spiegazioni sviluppate dalle NEU.

6. *Karl Menger.*

Fino alla seconda guerra mondiale non vi sono contributi significativi sul tema del paradosso, con la rilevante eccezione di Karl Menger (1934), figlio di Carl, l'economista austriaco. Karl era un matematico che non si occupava di probabilità, ma di algebra, teoria delle curve,

---

[26] Samuelson usa le stesse parole che Keynes aveva riferito a Cournot.

[27] Keynes cita come fonte il lavoro di Todhunter (1865), che è il primo ad aver offerto una rassegna suk paradosso..

[28] Samuelson (1977) considera il caso di un solo lancio, e confronta Keynes con Pascal (cioè l'aspettativa matematica) e con Bernoulli (aspettativa dell'utilità).

teoria delle dimensioni, e, arrivato nel 1946 negli USA, anche di teoria dei giochi. Tuttavia nel lavoro del 1934 non è la matematica che colpisce, ma le idee, che fanno di questo saggio un classico delle scelte in condizioni di incertezza. E per quanto sia notevole l'idea del "super Petersburg", vi sono anticipazioni della *prospect theory* che non sono state apprezzate sufficientemente dagli studiosi.
Torniamo per il momento alla critica che Menger rivolge alla soluzione proposta da Daniel Bernoulli, critica che è stata definita (Samuelson 1977) un salto quantico. La soluzione di Bernoulli consisteva nel far crescere sempre più lentamente il premio per l'uscita di "testa" all'ennesimo lancio, calcolandone il logaritmo. Menger allora propone di far crescere i premi non alla 2^N, ma al numero naturale *e* elevato a 2^N. In questo modo il valore atteso torna ad essere infinito. Da qui la conclusione che una funzione logaritmica non risolve il (super) paradosso, ma è necessario che la funzione si azzeri da un certo valore in avanti.

Non c'è dubbio che il contributo di Menger sia importante. Certo si potrebbe avanzare qualche scetticismo sul fatto che Peter offra il super-gioco. Se già possiamo formulare dubbi, come fa Samuelson stesso, sulla possibilità che Paul e Peter si mettano d'accordo sul gioco semplice, ben maggiori dubbi dovremmo averli nel caso del super-gioco. Ad esempio Peter s'impegna, nel caso in cui "testa" esca al quinto lancio, a pagare 8.886.111 euro (o dollari, yen o altra moneta), invece di 32. Ora nell'esperimento di Buffon gli esiti al quinto lancio erano stati 56, cioè il 2,7%, probabilità piccola, ma realistica[29]. Tuttavia non è questo il punto cruciale; Menger sapeva benissimo che nessuna casa da gioco avrebbe mai offerto un super Petersburg, e in realtà nemmeno un normale Petersburg, come sottolinea lo stesso Samuelson. La questione è però la seguente: ammesso che un Peter (tutti i governi del mondo insieme) offrisse il super-gioco, un qualunque Paul sarebbe disponibile a giocarsi tutta la sua ricchezza? Certamente avrebbe offerto di più che nel caso del Petersburg semplice, ma, dice Menger, non certo tutta la sua ricchezza, e neppure una percentuale significativa di essa.

Menger non considera valida neppure l'ipotesi che la funzione di utilità preveda una l'azzeramento dell'utilità marginale oltre un certo

---

[29] Si noti che il calcolo è basato nell'ipotesi che il premio al primo lancio sia 1. Se fosse 2, ci vorrebbe l'intero PIL europeo.

valore, ipotesi che, si ricorderà, era stata già avanzata da Cramer[30]. Di conseguenza se non dobbiamo guardare alla serie dei payoff (o della loro utilità) per trovare la soluzione, non rimane che guardare alla serie delle probabilità, ed in questa direzione che Menger guarda. Egli sa che l'ipotesi che i giocatori considerino nulla la probabilità di avere dodici, venti o trenta serie di "croci", era già stata formulata, ma la ritiene piuttosto rozza. Piuttosto l'analisi dei giochi d'azzardo "reveals a steadily increasing undervaluation of small probabilities".

L'impostazione di Menger anticipa uno dei punti rilevanti della *prospect theory* di Daniel Kahneman e Amos Tversky, che vedremo tra poco.

7. La teoria dell'utilità attesa.

Nel 1944 esce la *Theory of Games* di John von Neumann e Oscar Morgenstern. Il programma degli autori è ambizioso, in quanto vuole fornire un approccio alternativo a quello tradizionale. La funzione di utilità attesa (EU) attira subito l'attenzione degli economisti, principalmente per due motivi. La prima è che essa ha caratteristiche cardinali, nel senso che è unica a meno di trasformazioni lineari; la seconda è che spiega l'atteggiamento verso il rischio sulla base dell'andamento dell'utilità marginale: se decrescente abbiamo avversione al rischio, se costante neutralità, se crescente l'individuo ama il rischio. Le reazioni e perplessità degli economisti spingono von Neumann e Morgenstern a approfondire il tema nella seconda edizione del 1947, con un'appendice dove viene sviluppata la derivazione assiomatica della funzione. Nel 1952 a Parigi si svolge un seminario proprio sulla teoria dei giochi, dove l'attenzione si concentra sul ruolo del postulato d'indipendenza[31], che Savage (1954) denominerà "della cosa sicura"; l'economista francese Francois Allais presenta un

[30] Tuttavia una osservazione di Aumann (1977) sembra calzante: "He (Menger) writes that "most people would refuse to risk one dollar in order to obtain a probability of 1/10,000,000 of winning an amount which has even a subjective value of $10 million." It is of course not clear what is meant by "an amount with a subjective value of $lO,OOO,OOO."One interpretation might be an amount x whose utility U(X) is 10,000,000 times U($1). But by the definition of utility, Paul would then be willing to risk $1 in order to get a 1/10,000,000 chance at X. One can make sense of the above quotation from Menger only by turning it around to say that for most people there is no prospect x for which they would risk $1, when the probability of winning is only 1/10,000,000. But this simply means that utility is bounded by 10,000.000 U($1)".

[31] Così definito da Samuelson; se x è preferito a y, allora tra due scelte incerte: xp + (1-p)z e yp + (1-p)z la prima è preferita alla seconda. Malenvaud dimostra che il postulato d'indipendenza si può ricavare dagli assiomi di von Neumann.

esempio di scelta ipotetica in condizioni d'incertezza in cui i soggetti mostrano spesso scelte non coerenti con gli assiomi dell'utilità attesa.

La soluzione di Daniel Bernoulli al paradosso di S. Pietroburgo viene ovviamente riconosciuta come un'applicazione, con quasi due secoli di anticipo, della EU. Da questo momento il paradosso e la EU saranno strettamente legati, sia nel senso di vedere la EU come la conferma della soluzione del paradosso, sia al contrario una smentita.

Anche quello di Allais è stato definito un paradosso, mentre l'economista francese vedeva il suo (contro) esempio come una critica alla "scuola americana". Si supponga di avere due coppie di scelte diverse:

I) A: 10% di 5 milioni, 89% di 1 milione, 1% di zero *versus* B: 100% di 1 milione

II) C: 10% di 5 milioni, 90% di zero *versus* D: 11% di 1 milione, 89% di zero.

Se consideriamo la pura speranza matematica (o valore atteso) è evidente che nella scelta I A (1.390.000) è superiore alla B (1.000.000), mentre nella scelta II C (500.000) è superiore alla D (110.000). Ovviamente la stessa cosa si verifica se prendiamo i logaritmi naturale dei valori, anche se le differenze sono ridotte: A (14,15) superiore a B (13,82) e C (14,15) superiore a D (11,61). Inoltre non è difficile vedere che la II non è altro che una trasformazione lineare della I. Eppure la maggior parte delle persone[32] nella scelta I preferisce B ad A, mentre nella scelta II C a D.

Il fatto è che nella scelta I nel caso A c'è quella dannata pallina nera su cento, a fronte di un bel milione sicuro. Questo fatto per molti è decisivo: meglio un uovo oggi….. La scelta sarebbe molto diversa se invece di milioni si trattasse di cinquanta e dieci euro. Allora è probabile che la scelta sarebbe "razionale" secondo i criteri dell'EU, e non vi sarebbe paradosso. Quello che sembra emergere dalla psicologia umana è che il rimpianto di aver perso un milione è maggiore della gioia di averne ricevuti cinque, anche se quest'ultima probabilità è dieci volte maggiore della prima.

In sostanza mentre il paradosso di S. Pietroburgo costituiva una sfida per la teoria del valore atteso (speranza matematica), il paradosso di Allais viene a costituire una sfida alla teoria dell'utilità attesa (EU). Ventisette anni più tardi due psicologi cognitivi, Daniel Kahneman e Amos Tversky (1979), formuleranno la *prospect theory*, come tentativo di spiegare comportamenti del tipo di quelli che caratterizzano il paradosso di Allais.

---

[32] Nell'incontro di Parigi l'esempio di Allais, ed altri casi di scelta, furono sottoposti ad una serie di economisti e matematici, tra cui Bruno De Finetti. Leonard Savage (1954) racconta come egli stesso dette una risposta non conforme alla EU, spiegando come, dopo una più approfondita riflessione, si fosse reso conto di aver commesso un "errore".

8. *Le funzioni non expected utility (NEU)* .

La *prospect theory* è sufficientemente nota, per cui in questa sede ci si può limitare a una breve sintesi. I quattro aspetti principali sono: guadagni e perdite (relative ad un valore iniziale detto *reference point*) vanno considerate separatamente e le possibili perdite vengono aumentate (raddoppiate) rispetto ai possibili guadagni; la sensibilità rispetto al *reference point* è decrescente, e la funzione di utilità è concava per i guadagni e convessa per le perdite; gli individui, avversi alle perdite, hanno una curva della funzione di utilità più ripida per le perdite che per i guadagni; gli individui valutano le probabilità operando una trasformazione della distribuzione oggettiva delle probabilità attraverso una funzione che aumenta alcune probabilità e ne diminuisce altre, mantenendo il vincolo che la somma delle probabilità trasformate faccia il 100%[33].

Vediamo piuttosto come uno psicologo cognitivo-neuroeconomista la applichi per spiegare il paradosso di S. Pietroburgo. Camerer (2005) considera il premio che Paul è disposto a pagare per partecipare al gioco come il "reference point" che separa le perdite possibili dalle vincite possibili. Ad esempio se il coefficiente di avversione alle perdite è doppio di quello della propensione alle vincite, e se viene fissata una massima vincita al gioco di S. Pietroburgo, come ad esempio un miliardo (approssimativamente 2^{30}), Camerer calcola il massimo prezzo che il giocatore dovrebbe essere disposto a pagare in 17,55 unità di conto. Senza bisogno, sottolinea, di introdurre una funzione di utilità v. Neumann-Morgenstern concava, che pertanto non costituisce l'unico modo di risolvere il paradosso.

Va notato peraltro che la proposta di Daniell Bernoulli (la funzione di utilità logaritmica) ottiene il risultato senza introdurre una limitazione alla massima vincita (che rimane potenzialmente infinita), e

---

[33] Una tipica funzione è quella proposta da Prelec (1998). w(0)= 0, w(p) = exp(-b(-lnp)a), che con a<1 sopravvaluta le probabilità relativamente basse, da 0 a exp(-b1/(1-a)), mentre sottovaluta quelle relativamente alte da exp(-b1/(1-a)) a 1. Se b è pari all'unità, allora la funzione sopravvaluta tra 0 e exp-1 e sottovaluta tra exp-1 e 1 (exp-1 approssimativamente 0,368). Nel caso della distribuzione a priori di S. Pietroburgo, poiché la probabilità che testa esca al primo lancio è 0,5 e al secondo 0,25, l'applicazione della funzione di Prelec implica che la sotto o sopravalutazione, di non particolare entità, riguarderebbe solo il primo lancio verso tutti gli altri. Già questo fatto è indicativo della difficoltà di applicare la NEU al paradosso di S. Pietroburgo. Va detto poi che Kahneman e Tversky accettano che i payoff siano valutati in termini di utilità, a differenza della impostazione duale di Yaari (1987), che lascia i payoff al loro valore monetario.

portando inoltre ad una offerta massima più contenuta di quella di Camerer e quindi più vicina a quelle che emergono dalle indagini empiriche.

Secondo alcuni studiosi l'impostazione alla Kahneman e Tversky, anche se in grado di offrire spiegazioni ad alcuni paradossi, come quello di Allais, non riuscirebbe però a risolvere proprio quello di S. Pietroburgo. Blavatski (2005), Riegel-Wang (2006) hanno evidenziato problemi derivanti dalla funzione di trasformazione delle probabilità. Il tema è piuttosto tecnico, ma in sintesi si può dire che un semplice mapping come quello di Prelec (1988) ha difficoltà a spiegare simultaneamente diversi tipi di paradossi. Ad esempio se la trasformazione riduce le probabilità basse si potrebbe piegare il paradosso di S. Pietroburgo (ma vedi la nota 33), ma non si spiega la sopravvalutazione di eventi rari (ma positivi). Se viceversa la trasformazione consiste nel contrario (sopravvalutare le probabilità basse), ecco riemergere il paradosso. Altri studiosi (Pfiffelmann 2011, al Nowaihi et al. 2015) hanno proposto delle soluzioni ingegnose, complicando la funzione di trasformazione, in modo che le probabilità modificate intersechino non una volta sola, ma tre volte quelle "vere" (cioè quelle date dalla distribuzione delle probabilità a priori). In questo modo si ottiene la sottovalutazione di alte probabilità (ma non nella prossimità del 100%), la sopravvalutazione di basse probabilità (ma non in prossimità dello zero), mentre quando le probabilità sono molto vicine al 100% vengono considerate certe, e quando sono molto vicine allo zero vengono considerate nulle.

Anche se i lavori di questi autori sono apprezzabili sotto il profilo tecnico34 resta tuttavia il dubbio che si tratti di costruzione ad hoc, con funzioni che sono adatte a ottenere un prezzo plausibile per il Petersburg game, ma non adatte per qualche altro tipo di scelta in condizione di incertezza[35]. Si tratta comunque di un prezzo che risulta quasi sempre troppo alto nei testi campionari effettuati (vedi più avanti). Pertanto, perché non abbandonare del tutto l'approccio delle NEU e passare ad una impostazione basata su ipotesi più semplici di comportamento psicologico?

9 . *L'approccio psicologico.*

Alcuni autori hanno affrontato il paradosso di S. Pietroburgo cercando di individuare il processo psicologico di persone messe di fronte al gioco. A loro avviso bisogna abbandonare l'impostazione della EU. Ricordando i

[34] In genere gli autori sono matematici passati all'economia.

[35] Al-Nowaihi et al. ottengono un prezzo equo di 11,58 unità, ma è da notare che nel modello "rank dependent" di NEU usano una funzione logaritmica alla Bernoulli. Peraltro l'applicazione della sola funzione logaritmica dà un risultato simile per redditi particolarmente bassi, circa 3.300 unità monetarie.

suoi studi (Lopes 1981) l'autrice (2013) afferma:"Bernoulli's solution for the St. Petersburg paradox underlay my personal rebellion against the expected utility framework. Although I did not doubt that some mild diminishing marginal utility might operate over very large spans of wealth, it seemed evident that this had nothing to do with the perceived low value of the St. Petersburg game. The focus was all wrong. Although the key operation of diminishing marginal utility is to shrink the incremental value of successively larger prizes to virtually nothing, it seemed to me that people evaluating the game focus almost entirely on the small prizes that are most likely to be won".

Di fronte a giochi con alea, secondo questa impostazione, le persone cercano di individuare quale è la percentuale che permette loro di non perdere, piuttosto che guardare al valore atteso, o all'utilità attesa (*bid protection*). Usando diverse varianti del gioco di S. Pietroburgo, la Lopes individua nello 0,5 la percentuale tipica, che si configura quindi nella scelta della mediana della distribuzione, dato che la probabilità a priori è che il 50% delle volte "testa" esca al primo lancio. Nel caso del gioco di S. Pietroburgo con un premio di 2 se "testa" esce al primo lancio, 4 se esce al secondo e così via, il premio scelto sarebbe 3.

Poco tempo dopo Treisman (1983) propone un approccio non molto diverso, basato su un processo di decisione a due stadi, definito come *expectation heuristic (EH)*. Nel primo stadio l'individuo pensa a quale sia il numero di lanci al quale è più probabile che esca testa; nel secondo quale è il premio nel caso in cui la sua idea si realizzi. Nel caso del gioco di S. Pietroburgo, il lancio atteso è il secondo, e quindi il premio è 4, cioè 2^2, sempre nell'ipotesi che il premio al primo lancio sia 2. Il lancio atteso k ha il valore di due sulla base della formula:

$$k = \sum n(1/2)^n = (1/2)/(1\text{-}1/2)^2 = 2$$

La formula è basata sull'ipotesi che, in n giochi, la distribuzione avvenga secondo le probabilità a priori: 50% al primo lancio, 25% al secondo e così via. Se si calcola il numero complessivo di lanci con n giochi, si ottiene 2n, cioè il doppio di lanci, quindi mediamente "testa" esce al secondo lancio. Tuttavia questo è vero solo nell'ipotesi sopra ricordata, e se i giochi superano i 25. Nel caso di pochi giochi, o addirittura di uno solo, che "testa" esca al secondo lancio è vero, a priori, solo nel 25% dei casi.

L'ipotesi EH viene testata (Bottom et al. 1989) con 139 studenti undergraduate di un corso introduttivo di psicologia, e con un questionario inviato a 250 membri di una società professionale, con 47 risposte complete36. Ad entrambi i gruppi, denominati novizi (gli studenti) e esperti (i professionisti), è stato sottoposto il gioco di S.

[36] Le risposte sono state quindi state meno del 20%. Gli autori non lo specificano, ma si deve presumere che tra gli studenti non vi siano invece state defezioni, dato che ricevevano crediti per la partecipazione ai test.

Pietroburgo e tre varianti, cioè con l'aggiunta al premio di 5 o 10 dollari, o con il raddoppio del premio. Quest'ultima variante aggiunge al premio 5 unità se "testa" esce al terzo lancio, o 10 se esce al quarto. Le risposte dei novizi sono risultate conformi alla ipotesi EH, mentre quelle degli esperti lo sono state solo in parte, e con contraddizioni. Gli autori concludono che il loro studio, pur supportando la EH, mostrano che vi sono anche comportamenti che se ne allontanano in modo sensibile.
In un più recente studio (Hayden-Platt 2009)[37] gli autori hanno inviato un questionario a soggetti che si erano dichiarati disposti a riceverli; duecento su settecento hanno risposto. Hanno inoltre condotto un esperimento di un vero gioco con venti studenti, dando loro cinque o dieci dollari, e, dopo una settimana[38], effettuando il gioco di S. Pietroburgo. Hanno condotto un secondo studio con duecentoventi studenti di un corso introduttivo di psicologia, proponendo diverse varianti del gioco, per testare ipotesi come un numero limitato di lanci, oppure più giochi ripetuti. I due autori sostengono che i giocatori optano per la mediana, che nel caso in questione si colloca a metà tra 1 dollaro (premio se "testa" esce al primo lancio) e 2 dollari (se esce al secondo lancio), quindi 1,5. Questo è il valore indicato in media dagli studenti.
Va notato che la differenza indicata invece dai sostenitori della EH (cioè vicino a 2) è piuttosto piccola in valore assoluto. Inoltre i venti studenti che giocarono effettivamente hanno una media un po' più alta: 1,75, che si trova a metà tra 1,5 e 2, quindi a metà tra la tesi della mediana e quella della EH. Ma forse il problema principale è dato dalla distribuzione delle scelte dei duecentoventi studenti. Il grafico di Hayden e Platt (p. 162) presenta una distribuzione bimodale, con un 30% che offrono 1 dollaro e (poco meno del) 20% che ne offrono 2. Vi è poi oltre il 30% (diviso a metà) che offre tra 2 e 8 dollari oppure oltre 8 dollari.
Insomma la varianza è molto alta e 1,5 (o più precisamente la scelta >1 e <2) è indicato solo dal 5% degli studenti[39].

[37] Il primo autore svolge ricerche in un dipartimento di neurobiologia ed in uno di neuroeconomia, il secondo anche in uno di antropologia evolutiva. Forse è per questa ragione che l'esperimento è stato condotto, secondo quello che era lo schema originario di Nicholas Bernoulli, con un dollaro al primo lancio, due al secondo ecc.… Per confrontarlo con altri test empirici in teoria basterebbe raddoppiare le offerte effettuate dai soggetti, ma si può avanzare qualche dubbio. Una cosa infatti è raddoppiare il premio medio di Buffon (che partiva anche lui da una unità al primo lancio) che effettuava un test ipotetico, ed un'altra cosa farlo in uno studio empirico.

[38] Il ritardo temporale è motivato dal desiderio di evitare che gli studenti avessero la sensazione di star giocando con denaro non proprio.

[39] L'articolo di Hayden e Platt ha ispirato un ricercatore della School of Medicine della Georgetown University su temi quali il valore di una assicurazione vita (Gana 2014). Ovviamente la differenza tra media e mediana vale nel caso di distribuzioni asimmetriche; quella del gioco di S. Pietroburgo ovviamente lo è, mentre quella riguardante la distribuzione della mortalità, nella misura in cui è asimmetrica, lo è molto di meno.

Lo studio che ha svolto la maggiore quantità di esperimenti, sia ipotetici (questionari) sia reali, è quello di Tibor Neugebauer (2010). I test sono stati svolti in Germania, in Spagna, ed anche in Italia (alla LUISS). Non è il caso di descrivere i test effettuati[40], se non per dire che l'interesse di Neugebauer è rivolto a verificare l'ipotesi, già avanzata dai primi autori del paradosso, che i soggetti non considerano probabilità dell'ordine di 1/32. Tuttavia, dai dati riportati, si potrebbe trovare un certo sostegno all'ipotesi mediana o anche a quella della *EH*.
In una tesi di Master all'ETH di Zurigo Aleksey Akopian (2011) sviluppa l'approccio di Lopes, ipotizzando che i giocatori più che seguire uno schema vincita/perdita al 50%[41], siano disposti ad accettare una data percentuale di perdita (p), e non di più. Questa impostazione, definita come *Value at Risk Probability theory (VAR-P)* ipotizza che p sia mantenuta costante anche al variare delle ipotesi di gioco di S. Pietroburgo.
Akopian ha eseguito dei test statistici sui dati forniti da Hayden e Platt, nonché su un campione di 55 studenti dell'ETH. I risultati tendono, in linea di massima, a dare un certo supporto alla teoria *VAR-P*, anche se, come nota Akopian, il fatto che per lo più i soggetti sottoposti ai test siano studenti può avere qualche influenza, in quanto normalmente si tratta di persone con risorse disponibili limitate.
In generale si può concludere che l'ipotesi della mediana, di Hayden e Platt, quella della *EH* di Treisman, e quella della *VAR-P* di Lopes-Akopian siano tre varianti di uno stesso approccio, basato sull'idea che gli individui in caso di giochi con rischio seguano delle regole euristiche dettate dalla loro psicologia piuttosto che da comportamenti razionali secondo le regole della *EU* alla von Neumann-Morgenstern; regole peraltro non necessariamente coincidenti con le teorie NEU alla Kahneman e Tversky.
A conferma di questa ipotesi si può citare anche un test (Cox et. al 2011) condotto su studenti di economia dell'Università di Magdeburg, in cui si chiede se si vuole accettare giochi limitati ad un massimo numero di lanci, da 1 a 9. Il payoff è 2^n euro, mentre il prezzo di ciascun gioco è n meno 25 centesimi. Causalmente a qualche studente, che ha accettato un certo numero di giochi, viene chiesto di effettuare realmente il gioco. Su trenta studenti quattro hanno rifiutato il gioco con uno o due lanci, ma al crescere del numero di lanci il numero di rifiuti è cresciuto fino a venticinque nel caso di nove lanci; nel passaggio da cinque a sei lanci la percentuale di rifiuti ha superato il 50%. Nel caso di uno o due lanci in cui il valore atteso è 1 o 2 euro mentre il prezzo è 0,75 o 1,75, è del tutto plausibile che la

[40] Il lavoro di Neugebauer è liberamente leggibile sul web.
[41] fissando quindi la disponibilità al gioco a metà tra il premio al primo lancio e quello al secondo (quindi 1,5 oppure 3, a seconda che il premio parta da 1 o da 2), cioè la mediana.

maggior parte degli studenti accetti[42]. Da sei a nove lanci (massimi) invece la ragione per cui una (crescente) maggioranza rifiuta deriva probabilmente da una reazione psicologica del tipo: " è più probabile la perdita di qualche euro che non il guadagno possibile, ma molto improbabile, di 512 (2^9)".

10. L'analisi statistica dei giochi ripetuti

Nel 1945 lo statistico William Feller, che probabilmente non conosceva il lavoro di Buffon[43], affrontò il tema dei giochi ripetuti, mostrando che il premio medio Pm tende a $\log_2 n$ quando n tende ad infinito (Feller 1945 e 1957). In altri termini se il numero dei giochi è 2^n, il premio equo Pm sarà tanto più prossimo ad n quanto più alto è quest'ultimo. Feller si basa sulla legge dei grandi numeri, anche se in linea teorica la legge dei grandi numeri vale per distribuzioni con varianza finita.
Per chiarire la logica del ragionamento di Feller, Se $(2^n-1)= M$, e se il numero dei lanci segue la distribuzione data dalle probabilità a priori, il premio totale è dato da

$P = (2^n/2)2 + (2^n/4)4 + \ldots + (2^n/2n)2n$, e dividendo per M, $Pm = n$

Ovviamente il risultato è approssimato se n non è un intero.
Ad esempio se supponiamo[44] di avere 127 giochi, e che questi si distribuiscano esattamente secondo le probabilità a priori: 64 al primo lancio +32 al secondo+16 al terzo….+ 1 al settimo = 127 esiti, allora il payoff totale sarà 128x7=896. Dividendo il payoff per 127 otteniamo 7,06, molto vicino al logaritmo in base 2 di 128. Al crescere di n la differenza si annulla. Ovviamente il caso in cui 127 lanci di moneta (o estrazione di numero pari) si distribuiscano esattamente con 64 al primo lancio, 32 al secondo e così via, è alquanto improbabile (ma può capitare). Ma al crescere del numero degli esiti (e quindi dei lanci) la legge dei grandi numeri ci dice che le distribuzioni tenderanno a rispettare la progressione in base 2. Se, come supponeva Feller, il premio al primo lancio è 1 invece di 2, allora il premio equo è $n/2$.
Vi sono due problemi nell'approccio di Feller: il primo è che il quesito di Nicholas Bernoulli era per un solo gioco, e riguardava il valore atteso (infinito) che ne risultava. Il secondo è che se n tende ad infinito vuol dire che anche il premio medio equo tende ad infinito; dunque il problema dell'infinito si ripresenta.

---

[42] Si tratta di prezzi tali da non spaventare nessuno. E' probabile che quelli che hanno rifiutato lo abbiano fatto più che altro perché gli secca perdere, piuttosto che a causa di una funzione di utilità logaritmica.

[43] E sicuramente neppure quello di Condorcet, i cui saggi sul tema non erano stati pubblicati.

[44] La somma 64+32+16+….+1 non dà 128 ma 127. E' la ragione, che abbiamo visto più sopra alla nota 13, per cui Buffon sbagliò di una unità il numero del primo lancio.

Dopo una trentina di anni gli statistici cominciarono[45] ad interessarsi all'approccio di Feller, sviluppando una serie di analisi di crescente complessità. Uno dei primi è stato Martin-Lof (1985) che ha studiato le situazioni in cui il premio medio *Pm,* per un dato numero di giochi, differisce da *n*, dato che solo per *n* che tende ad infinito la differenza *Pm-n* tende a zero. Martin-Lof ha studiato la distribuzione degli scarti *Pm-n*, definendone le caratteristiche.
Non è il caso di esporre qui il complesso lavoro, ma è interessante accennare alla domanda che si pone l'autore: come può Peter, cioè la casa da gioco, ridurre il rischio di perdita? La risposta è che se il numero dei giochi è superiore a 32 (2^5), e se Peter vuole un rischio solo di uno su cento deve chiedere un premio medio pari a $n+256$ ($=2^8$), ma se vuole un rischio di uno su mille deve chiedere $n+2048$ ($=2^{11}$). Quando *n* diviene un numero molto alto la componente che lo copre dal rischio perde di importanza, ma per valori di *n* nell'intervallo 100-200[46] la componente è ancora prevalente. Questo pone ovviamente la domanda di quanto debba essere amante del rischio Paul (il giocatore) per accettare il gioco.

11. Una nota su Condorcet

Come si è accennato in precedenza, Condorcet fissò un numero massimo di lanci *N*, raggiunto il quale il premio rimaneva fermo a 2^N[47]. Nell'ipotesi di un solo lancio, si può dire solo che il valore atteso è N+1; infatti se la probabilità che esca testa al primo lancio è 0,5, al secondo 0,25 e così via, al lancio ennesimo la probabilità sarà $1/2^N$. La sommatoria di tutti i lanci superiori a N hanno esattamente probabilità $1/2^N$. Pertanto N+1 è la somma che, diremmo noi usando i concetti della funzione di utilità attesa, un giocatore neutrale al rischio sarebbe disposto a pagare. Per stabilire questo risultato la ripetizione del gioco e la legge dei grandi numeri non c'entra.
Supponiamo però di ripetere il gioco per 2^n, dove *n* non deve essere necessariamente un numero intero[48] . Se non vi fosse un numero massimo di lanci *N*, e se la distribuzione dei lanci seguisse le probabilità teoriche,

---

[45] Per la verità uno studioso polacco (Steinhaus 1949) aveva ottenuto il risultato di Feller con un approccio ingegnoso, ma il suo lavoro è rimasto sconosciuto fino a quando Csorgo e Simons (1993-94) non hanno richiamato l'attenzione su di esso. I due autori hanno scritto sul tema vari lavori esplorando diversi aspetti matematici di varianti del gioco di S. Pietroburgo.

[46] Si noti che 2^{100} o 2^{200} sono numeri straordinariamente elevati. Ad esempio 2^{100} è approssimativamente pari a 1,267xExp^{30}. Ovviamente ai tempi di Buffon neppure arruolando un esercito di ragazzi si poteva tentare l'esperimento, mentre ora i computer lo permettono facilmente.

[47] Come si è accennato, Condorcet scriveva 2^{N-1}, perché, secondo l'originale formulazione di Nicholas Bernoulli, il premio al primo lancio era di una unità, non due, come è diventato usuale da una quarantina di anni.

[48] Nel caso di *n* intero avremmo un numero della serie 2, 4, 8, 16, 32, 64…….e così via.

per cui al primo lancio abbiamo $2^n/2$, al secondo $2^n/4$, al terzo $2^n/8$, e così via, allora il prezzo equo sarebbe esattamente *n*.
Se invece introduciamo un numero limite di lanci *N*, per cui tutti a tutti i lanci successivi ad *N* vengono attribuiti payoff pari a 2^N ; se $N<n$, ad esempio $N=3$, $n=6$, allora il prezzo equo è $N+1$, *cioè 4*. Infatti la distribuzione dei numeri al crescere dei lanci è di questo tipo:
1° lancio $2^n/2$
2° lancio $2^n/4$
3° lancio $2^n/8$
tutti i lanci successivi fino all'ultimo (ennesimo) ammontano a $2^n/8$, e vengono valutati per 2^3 (ricordando che si ipotizza che il premio al primo lancio sia *2*). Di conseguenza il totale dei payoff è pari a

$$P = (2^n/2)2 + (2^n/4)4 + (2^n/8)8 + (2^n/8)8 = 2^n(1+1+1+1) = 4(2^n),$$

e il payoff medio è $4(2^n/2^n)=4$, cioè 3 (il limite massimo di lanci ammessi) + 1.
Ma se invece $N>n$, cioè se la distribuzione dei risultati, secondo le probabilità teoriche, termina ad un numero di lanci inferiore ad *N*, allora il prezzo equo sarà *n*, non $N+1$. Se ad esempio il numero di giochi è 2^{10}, cioè *1024*, ed il numero di lanci massimo per gioco è *12*, allora il prezzo equo è *10*, non *13*. Tuttavia, fissando un certo *N*, se *n* tende ad infinito, poiché avremo $n>N$, il prezzo equo sarà $N+1$; ciò sempre che i risultati dei vari giochi si distribuiscano perfettamente secondo le probabilità a priori. Anche se con qualche confusione Condorcet trova una sua soluzione al paradosso di S. Pietroburgo, indicando un prezzo equo ($N+1$) che va bene sia nel caso di un solo gioco, sia in quello di molti giochi, anzi in particolare in questo secondo caso; un prezzo che non varia al variare di *n,* cioè del numero dei giochi (purché $n>N$).

12. Senetti e l'approccio di portafoglio

Senza conoscere le idee di Condorcet, John Sennetti (1976) parte con una impostazione simile, fissando cioè un limite (usa n^* invece di *N*) al numero di lanci, e indicando quindi in n^*+1 il valore atteso[49]. A questo punto sottolinea però che la varianza aumenta all'aumentare di n^*, e, in particolare, che il rapporto tra varianza e valore atteso tende ad aumentare al crescere di n^*. Applicando il moderno approccio di portafoglio, ed in particolare la formula[50] di Sharpe (1970), Sennetti mostra che un n^* più piccolo è preferito ad uno più grande. In sostanza Paul direbbe a Peter, che gli offre il gioco di S. Pietroburgo: no grazie, preferisco un normale testa o croce a un solo lancio, e comunque non sono

[49] Come Condorcet, Sennetti suppone che tutti gli eventuali lanci maggiori di n^* siano valutati 2^{n^*}. Se si stabilisse che il loro valore è zero, allora il valore atteso sarebbe minore di n^*; se si stabilisse che si ripete di nuovo, allora il valore atteso sarebbe esattamente n*.
[50] Cioè il rapporto tra la differenza del valore atteso rispetto al prezzo e la deviazione standard.

disposto a pagare più di tre euro. In questo modo, conclude Sennetti, senza introdurre una funzione di utilità, si ottiene il risultato di un valore finito, molto ridotto, del gioco.

13. Il gioco di S. Pietroburgo come frattale.

Un fisico ed una biologa (Larry Liebovitch - Daniela Scheurle 2000) hanno evidenziato un aspetto implicito nelle analisi di Feller, Martin-Lof e gli altri autori che hanno studiato la statistica dei giochi ripetuti. Si tratta della natura frattale della funzione di densità distributiva del gioco ripetuto *n* volte. I frattali sono oggetti matematico-geometrici che presentano la caratteristica di ripetere se stessi con dimensioni sempre più ridotte. Un buon esempio è un albero, con un tronco da cui si dipartono rami sempre più piccoli, che ripetono la struttura principale. Introdotti da Benoit Mandelbrot, si è visto che trovano ampia applicazione in molti aspetti del mondo naturale.
Liebovitch-Scheurle usano il gioco di S. Pietroburgo come esempio[51]. Se il gioco consistesse nel tirare una moneta una sola volta, con vincita di due euro se esce "testa" e zero se esce "croce", il prezzo equo sarebbe un euro, nel senso che ripetendo il gioco alla lunga la vincita media sarebbe esattamente un euro. La funzione di densità probabilistica sarebbe una gaussiana che si distribuisce intorno alla moda di un euro, con varianza sempre più ridotta quanto più aumenta il numero dei lanci della moneta. Cosa succede con il gioco di S. Pietroburgo, in cui non vi è nessun limite al numero di lanci necessari a far apparire "testa"? Certo, la metà delle volte la vincita sarà di due euro ("testa" appare al primo lancio), e in media sarà di quattro euro (in media "testa" appare al secondo lancio), ma la funzione di densità probabilistica ha una caratteristica tipica delle legge di potenza, come relazione lineare (inversa) tra il logaritmo della funzione e il numero dei premi (che dipende dai lanci necessari a far apparire "testa").
Un interessante passo in avanti fu compiuto dopo una decina di anni da due matematici, Dominic Klyve e Anna Lauren (1911), che avevano letto, in un testo di storia della matematica usato nei corsi, dell'esperimento di Buffon; decisero di ripetere al computer l'esperimento di Buffon (2048 giochi), insieme ad altri sette insiemi di giochi, da mille ad un milione. Trovarono che il payoff medio aumentava con il numero dei giochi (da 7,80 nel caso di mille a 25,69 nel caso di un milione), e che questo era un fatto ben noto. Cercarono quindi di esaminare la distribuzione dei payoff medi iterando il gioco di 2048 game un milione di volte con la procedura di Monte Carlo (MC), ottenendo una distribuzione non solo fortemente asimmetrica, tendenzialmente decrescente, ma con numerosi denti e

[51] I due autori non conoscono i dettagli di come è nato il paradosso. Scrivono che Niklaus Bernoulli si trovava in Russia (da cui il nome del paradosso), e che il cugino Daniel si trovava in Germania. Si tratta di peccati veniali, dato che a loro il gioco di S. Pietroburgo interessa solo come esempio.

anche intervalli vuoti. La sorpresa emerge dalle loro parole: “We were taken aback at the resulting bizarre distribution. When we showed the graph around, several colleagues expressed surprise. One questioned our random number generator! What sense can we make of this picture? We immediately see that the most likely values are indeed those near $\log_2(2048)$, as expected. However, the rest of the graph is surprising. Its comb-like, fractaline quality demands explanation”.
La spiegazione dei due autori si concentra sui denti della distribuzione. Essi notano, correttamente, che il payoff medio di un esperimento alla Buffon è determinato soprattutto dal valore più alto[52] raggiunto da un dato gioco (tra i 2048). Ad esempio, osservando un dente a 42, notano che può essere il risultato di un gioco con quindici “croci” prima di ottenere testa. Ora $2^{16}/2048 = 32$. Se gli altri 2047 giochi danno payoff medi nell’intorno di 10, ecco che il dente nell’intorno di 42 trova una logica spiegazione.

La spiegazione si può estendere a due giochi con quattordici “croci”, dato che le probabilità di avere un payoff a 2^{16} o due payoff a 2^{15} sono uguali. Ma si può continuare con un payoff a 2^{17}, con un contributo di 64, 2^{18} con un contributo a 128. Anche se le probabilità di questi eventi sono rari, trovare dei denti nell’intorno di 74 o di 138 è più probabile che non a 69 o 133.
Mentre Klyve e Lauren si sono si sono concentrati nella spiegazione dei picchi della distribuzione, Alexander Olivero (2016)[53] spiega la ragione dei vuoti della distribuzione, mostrando che alcuni valori di payoff medi non possono uscire dalle combinazioni di giochi di 2,4,8, 16 ecc….. La spiegazione non è difficile ma è troppo lunga per essere riportata qui. Un’idea intuitiva può essere la seguente: supponiamo due soli giochi, ognuno limitato a sei lanci al massimo. Per non complicare la tabella si supponga che se non esce testa dopo la sesta volta si attribuisce il valore di 64 (2^6). Quindi sicuramente avremo esiti da 2 a 64. Le combinazioni dei payoff medi sono 6x6, ma in effetti i numeri sono 21, cioè il 58,3% di 36.

Lanci	I°	II°	III°	IV°	V°	VI°
I°	2	3	5	9	17	33
II°	3	4	6	10	18	34
III°	5	6	8	12	20	36
IV°	9	10	12	16	26	40
V°	17	18	20	26	32	48
VI°	33	34	36	40	48	64

[52] L’ipotesi implicita è che i giochi si distribuiscano, grosso modo, secondo la distribuzione di probabilità a priori.
[53] Si tratta di una tesi di laurea *undergraduate*, che definiremmo triennale, considerata dall’università meritevole di *honors*.

La probabilità scende dal 50% al primo lancio, a 3,125% al sesto lancio (o successivi). Ecco i payoff medi dei primi otto numeri possibili con le relative percentuali:

2 (25%), 3 (25%), 4 (6,25%), 5 (12,5%), 6 (6,25%), 8 (1,5625%), 9 (6,25%), 10 (3,125%)

Come si può notare manca il 7, e la probabilità del 5 è doppia di quella del 4, e quella del 9 è quadrupla di quella dell'8. Ciò spiega sia i vuoti che i denti della possibile distribuzione[54].
Adesso passiamo a 3 giochi. Abbiamo 44 payoff medi su 6x6x6 (44/216 = 20,4%). Vi sono meno numeri interi e più frazioni; guardando i numeri interi notiamo che rispetto al caso di due giochi non ce ne sono più alcuni, tra cui 5, 9, 10, mentre aumentano i vuoti, soprattutto quando andiamo verso 64. E' chiaro che al crescere del numero dei giochi i vuoti, si riducono, ma poiché i payoff medi aumentano, ne rimangono sempre alcuni.
Olivero replica per un milione di volte il caso di quattro giochi, ottenendo circa un quarto delle volte payoff medi intorno a 3, ma anche, con frequenze minori e numerosi denti valori fino a oltre 300. Vi sono degli intervalli vuoti; ad esempio tra 120 e 131. In effetti ottenere 125 o 126 con quattro giochi è impossibile; si può ottenere 120 (5°, 6°, 7°, 8° lancio, con probabilità $1{,}49e^{-8}$) oppure 131,5 (1°, 2°, 3°, 9°, con probabilità $3{,}05\ e^{-5}$)[55]. Tra 201 e 255 vi é un altro intervallo vuoto, perché di nuovo non vi sono combinazioni di quattro giochi che possano dare payoff medi di 210, 220, ed altri. Per un approfondimento teorico sul tema si veda Kern-Wedrich (2014).

14. Simulazioni di Monte Carlo

Olivero presenta i dati delle simulazioni MC per 4, 10, 2^{12}, 2^{13}, 2^{14}, 2^{15}. Le simulazioni presentano una struttura simile a quella di Klyve e Lauren. Ho pensato di provare con due simulazioni[56] di 128 (2^7) e 256 (2^9) giochi e di esaminare in dettaglio i payoff medi particolarmente alti (sia Klyve e Lauren che Olivero non danno questo dettaglio, che è importante per il tema che si affronterà più avanti).
Alle due simulazioni è stato posto un vincolo al numero massimo di lanci di ciascun gioco, per cui se "testa" non esce entro il trentesimo lancio, si dà il valore fisso di 2^{31}. In questo modo si elimina il problema dell'infinito, e quindi dell'asserita impossibilità di applicare il teorema del limite centrale

[54] Olivero presenta una simulazione di Monte Carlo a due giochi che mostra visivamente queste caratteristiche.
[55] 131,5 ha quindi più probabilità di apparire di 120, ed infatti nella simulazione ci sono circa 3000 payoff intorno a 131 e solo 5 a 120.
[56] Mi sono rivolto a mio figlio Andrea, approfittando delle sue conoscenze matematiche.

e la legge dei grandi numeri. Pertanto, nel caso di 128 giochi, se i vari payoff si distribuissero secondo la legge dei grandi numeri, dovremmo ottenere in media valori nell'intorno di 7. I risultati sono i seguenti:

I) 128 giochi, 10.000 iterazioni

Payoff medio	Numero	Percentuale
4,4-6,5	968	(9,7)
6,51-7,5	1271	(12,7)
7,51-14,5	5420	(54,2)
14,51-19,5	1409	(14,1)
19,51-100	757	(7,6)
100,1-1000	152	(1,5)
da 1000,1 a 16391	23	(0,23)

Media generale 15,5; mediana 9,6.

Come si può notare l'intervallo unitario modale è appunto quello tra 6,51 e 7,5, mentre i sette successivi (mediamente circa 900 da 7,51 a 12,5, e 460 da 12,51 a 14,5) comunque rappresentano più della metà dei risultati finali. Valori inferiori si hanno nel 9,7% dei casi (354 tra 4,4 e 5,5 e 614 tra 5,51 e 6,5). Se Paul (il giocatore) e Peter (la casa), affidandosi alla distribuzione delle probabilità a priori, avessero stabilito un prezzo medio di 7 Paul avrebbe avuto buone opportunità di vincere; non solo, in alcuni casi avrebbe potuto infliggere a Peter delle serie perdite. Particolarmente interessanti sono i 175 valori superiori a 100. Essi si raggruppano per valori di poco superiori a 128, 256, 512, 1024 e così via.
L'interpretazione non è difficile, ed è quella suggerita da Klyve e Lauren. Se "testa" esce al 14° lancio, ottenendo 16.384 in quest'unico game, porta il payoff medio a 128; pertanto se gli altri payoff rientrano in valori normali, tra 4 e 10, noteremo, come effettivamente si verifica, un addensamento tra 133 e 138. La stessa cosa si nota sopra 256, 512 ecc…. Naturalmente i 13 numeri di poco superiori a 1024 potrebbe uscire sia perché un (solo) gioco ha avuto diciassette lanci, o perché due giochi hanno avuto sedici lanci, o anche che quattro giochi hanno avuto quindici lanci (e così via…); le probabilità sono infatti le stesse (molto molto basse). Da notare che possiamo escludere che vi sia stato un (solo) gioco con venti lanci o due giochi con diciannove lanci, perché in questo caso avremmo avuto un payoff di (poco superiore a) 8192. Nel caso specifico il risultato di 16.384 è stato ottenuto con i primi sette esiti dei centoventisette giochi che hanno dato i seguenti risultati:

64, 32, 16, 7, 4, 3, 1,

che, come si nota, seguono la distribuzione probabilistica a priori quasi perfettamente. La media è di 7,43. Ma il gioco mancante a 128 ha avuto una serie di venti "croci", che porta esattamente a 16391,375.
Questo insieme di 128 giochi, che rappresentano appena 1,75% del totale delle simulazioni, portano la media generale a oltre il doppio del payoff modale (quello intorno a 7). Più rilevante è forse il valore mediano (9,6) che è superiore a quello modale, ma comunque ben più vicino di quanto non lo sia la media complessiva. La distribuzione risulta decisamente asimmetrica sulla destra.

II) 512 giochi, 10.000 iterazioni

Pay off medio	Numero	Percentuale
Da 4,4 a 8,5	1873	18,7%
Da 8,51 a 9,5	769	7,7%
Da 9,51 a 18,5	6707	67,1%
Da 18,51 a 23,5	296	3%
Da 23,51 a 100	243	2,4%
Da 100,1 a 1000	99	0,1%
Da 1000 a 65544	13	0,0013%

Media generale 44,6; mediana 10,9.

Possiamo notare che i risultati si sono distribuiti in modo molto più uniforme rispetto a quello che era avvenuto nel caso dei 128 giochi, cioè la varianza è aumentata in modo rilevante. La moda è ancora nell'intorno di 9 (con 769 casi), ma la media degli altri intervalli è di 468 (tra 4,4 e 8,5) e di 745 (tra 9,51 e 18,5), per poi diminuire rapidamente. I payoff oltre 100 sono nettamente diminuiti (112 rispetto ai 175 del caso a 128 giochi). La mediana risulta più vicina alla media di quanto non lo sia nella simulazione I, e ciò dipende dal fatto che il numero di giochi con payoff più basso di quello modale è risultato il doppio (18,7% contro 9,7%). Ma la differenza più rilevante è nella media.
Se consideriamo invece il totale dei giochi, rispettivamente 1.280.000 (128x10.000) e 5.120.000 (512x10.000), e le due medie complessive, notiamo che nel primo caso (128 giochi) la media, nell'ipotesi di distribuzione teorica a priori, dovrebbe essere più alta (poco meno di 17), mentre nel secondo caso (512) dovrebbe essere significativamente più bassa, circa la metà.
Il payoff estremamente elevato (65544) è il risultato della seguente sequenza dei primi otto esiti ai vari lanci:

260, 124, 64, 33, 12, 11, 4, 3,

sequenza che segue, anche se in modo più imperfetto, la distribuzione a priori, con un payoff medio di 8,66 (arrotondato). Il 512esimo gioco è un outlier, caratterizzato da una serie di 24 “croci” prima della fatidica “testa”. Ora $22^5/512$ è uguale a 65.536, per cui aggiungendo e ponderando i precedenti, si arriva esattamente a 65.544,64.
A priori si penserebbe che i valori più elevati di 100 siano più frequenti nel caso di 512 giochi piuttosto che in quello di 128, invece è risultato il contrario: 175 contro 112 (ed anche i valori oltre i 1000 sono 23 contro 13). Tuttavia il valore più alto è stato ottenuto nel caso dei 512 giochi; ed è in questo caso che è uscito il risultato meno probabile. Nel caso del risultato più alto dei 128 giochi, infatti, la probabilità a priori è data da $1/2^{21}$ moltiplicata per 1.280.000. Il risultato è 0,61, cioè meno dell’unità, ma arrotondando ci si arriva. Invece nel caso dell’altro risultato, abbiamo $1/2^{25}$ per 5.120.000, e questa volta si ottiene 0,15. Il secondo risultato quindi è, a priori, nettamente meno probabile del primo; tuttavia è uscito.
Il limite di un massimo di trenta lanci per gioco non è mai entrato in funzione, dato che, come si è visto, il massimo di lanci è stato di 25. Possiamo chiederci allora come cambierebbero i risultati, nel caso in cui il tetto dei lanci fosse portato ad un livello decisamente più basso, ad esempio a dieci (massimo premio 1024). Ci aspetteremmo una media generale più bassa, ma è interessante vedere come si modifica la distribuzione. Si è ripetuto il caso della reiterazione di MC dei 128 giochi, limitandosi a 1000 iterazioni, in quanto il limite massimo dei lanci rende impossibile ottenere dei payoff medi elevati[57]. Essendo il limite al numero dei giochi (10) più alto di *n* (7), ci attendiamo che la moda si collochi intorno a 7 piuttosto che a 11.

III) 128 giochi, 1000 iterazioni, massimo 10 lanci

Pay off medio	Numero	Percentuale
4,6-6,5	144	(14,4)
6,51-7,5	162	(16,2)
7,51-14,5	552	(55,2)
14,51-19,5	104	(10,4)
19,51-27,8	38	(3,8)

Media generale 10,03 mediana 8, 6

[57] In pura teoria tutti e 128 i giochi potrebbero uscire al decimo lancio o a lanci ancora maggiori, portando quindi il payoff medio totale a 1024. Ma è un’eventualità veramente improbabile; in genere le distribuzioni seguono, nella gran parte dei giochi quella delle probabilità a priori. E’ solo uno o due lanci che si discostano, come si è visto.

In effetti la moda si colloca nell'intervallo 6,51-7,5 con 162 giochi, mentre nell'intervallo successivo la media è di 79 giochi per unità di intervallo. Ma se confrontiamo questo MC con quello precedente (anche tenendo conto che quest'ultimo ha un decimo d'iterazioni), troviamo una notevole differenza, dovuta al limite dei dieci lanci. Infatti il premio più alto in una delle mille iterazioni è 27,8, dovuta a due esiti all'ottavo lancio, due al nono e uno al decimo (o oltre). Il limite ha impedito non solo risultati oltre 1000, ma anche oltre 30. Del resto se in quella simulazione precedente (sempre a 128 giochi), in cui si è ottenuto il payoff di 16.391, vi fosse stato il limite dei dieci lanci, avremmo avuto un payoff di 17,2.
Vi è una diminuzione di un terzo della media, un (leggero) aumento della moda, una diminuzione della varianza; la mediana rimane di un punto e mezzo maggiore della moda. L'asimmetria (skewness) dunque permane, e non è difficile capire la ragione. Supponiamo di avere una distribuzione di 63 giochi secondo le probabilità a priori: 32 al primo lancio, 16 al secondo, 8 al terzo, 4 al quarto, 2 al quinto ed 1 al sesto; la media è 6,1[58]. Supponiamo ora che uno dei due giochi usciti al quinto lancio escano alternativamente al sesto oppure al quarto. Nel primo caso la media sale a 6,6, mentre nel secondo scende a 5,8. L'aumento (+0,5) quindi è maggiore della diminuzione (-0,3). Se lo spostamento, in aumento o in diminuzione fosse di due lanci (al settimo o al terzo), la media salirebbe a 7,6 (+1,5) o scenderebbe a 5,7 (-0,4). La ragione della distribuzione asimmetrica è quindi insita nelle caratteristiche del gioco di S. Pietroburgo, e quindi è logico ritrovarlo in ripetizioni di MC, a qualunque numero di giochi, anche se si fissa un limite, stringente, ai lanci.

15. L'ipotesi di stazionarietà

Ricardo Rodriguez (2006) ha avanzato l'ipotesi di stazionarietà della distribuzione dei payoff di un certo numero di giochi ripetuti alla MC. Più precisamente ipotizza che la differenza tra media e moda delle distribuzioni resti costante al crescere del numero di giochi oggetto della simulazione MC. Rodriguez presenta due grafici in cui rispettivamente 1.000 e 100.000 giochi vengono reiterati 10.000 volte. Le due distribuzioni sono unimodali e fortemente asimmetriche a destra; sulla base di quanto detto in precedenza non si tratta di una sorpresa. Le due mode sono rispettivamente nell'intervallo dei payoff 7-8 (nel caso dei 1.000 giochi) e 17-18 (nel caso dei 100.000 giochi). Anche questo è ciò che ci si aspetta; se i giochi si distribuiscono nei vari lanci secondo le probabilità a priori, la distribuzione andrà da 500 al primo lancio a 1 al decimo lancio, nel caso di 1.000 giochi, e da 50.000 al primo lancio a 1 al diciassettesimo lancio nel caso di 100.000 giochi. Avremo quindi 10 payoff complessivi pari a 1.000

[58] I giochi sono 2^6-1, per avere una distribuzione perfettamente rispondente alle probabilità a priori. Se aggiungiamo un gioco ai 32, allora la media si avvicina a 6, ma la percentuale al primo lancio non è più 50% ma 51,6%.

(500x2 + 250x4 + 125x8+…..) che divisi per 1.000 portano ad un payoff medio di 10; analogo discorso per il caso di 100.000 giochi , con payoff medio di 17 [59].
Per verificare l'ipotesi di stazionarietà la via più logica è quella di produrre altre simulazioni MC, e verificare se lo scarto tra media e moda rimane (statisticamente) costante, oscilla cioè entro un range limitato. Rodriguez compie simulazioni MC con gruppi di 10^k (k = 1,2,3,4,5,6), prendendo il payoff medio del 25% dei risultati più bassi, poi il 50% ed infine il 75%. Effettua alcuni test statistici dai quali risulterebbe una (parziale) conferma dell'ipotesi di stazionarietà. In realtà quello che Rodriguez ha ottenuto è una conferma della forma generale della distribuzione, unimodale e asimmetrica a destra, cosa che dovremmo aspettarci, in conformità a quanto detto in precedenza. La moda delle simulazioni MC dei vari 10^k è data dall'esponente $2^n = 10^k$, dove $n = 3{,}32k$. Le mode si collocano sempre entro i primi 25% risultati, infatti i payoff medi sono leggermente superiori. Data la caratteristica della distribuzione asimmetrica, i payoff al 50% e al 75% salgono sempre, con aumenti irregolari. Tuttavia non è un caso che Rodriguez non fornisca il payoff medio del 100% delle simulazioni; è plausibile pensare che lo scarto tra moda e media risulterebbe crescente, dato che il contributo del 25% di risultati più alti tende ad accentuare lo scarto, come si è visto nelle simulazioni effettuate (simulazione I: scarto 8,5, simulazione II: scarto 35,6).
A conferma si può citare l'analisi condotta da Foley (2010), basata sull'analisi campionaria di 2^n giochi, con n da 1 a 15, con reiterazioni MC. A parte la conferma di risultati noti (come il carattere asimmetrico dei payoff), Foley[60] effettua una stima della relazione tra n e la distribuzione dei payoff alle crescenti numerosità dei giochi, confrontando i risultati con la distribuzione empirica dei percentili, da 20% a 95%. Le differenze delle sette distribuzioni (n= 3,5,7,9,11,13,15) sono notevoli, a conferma della non stazionarietà delle distribuzioni.
Più che una costanza tra media e moda, sarebbe più plausibile ipotizzare una costanza tra mediana e moda, come si potrebbe dedurre dalle tre simulazione effettuate (par. 14); anche nelle due distribuzioni MC con 1000 e 100.000 giochi, di cui Rodriguez riporta le percentuale, si può

---

[59] Per essere più precisi, anche nell'ipotesi di distribuzione secondo le probabilità a priori il payoff totale di ogni lancio non sarà precisamente 1.000. Ad esempio al quarto lancio non possiamo avere 62,5 risultati; o avremo 63 o 62. Tuttavia arrotondando le frazioni all'unità, per eccesso o per difetto, alla fine otteniamo il risultato medio molto vicino a 10. Stesso discorso per il caso di 100.000 giochi, dove avremo un risultato medio vicino a 17.

[60] Il lavoro sembra essere parte di un progetto di tesi presso il Dipartimento di matematica e statistica della Northern Kentucky University. Alla fine dell'articolo Foley nota che le curve di distribuzione dei percentili dei guadagni medi presentano una somiglianza con i dati sulla magnitudine dei terremoti disponibile presso l'Università di St. Louis. Il paradosso di S. Pietroburgo sembrerebbe avere connessioni sorprendenti.

notare che le mediane si collocano ad un valore di 1-1,5 più alto di quello modale. Ovviamente ci si riferisce alla distribuzioni MC con un dato numero 2^n di giochi; se consideriamo invece singole distribuzioni di 2^n (con n almeno maggiore di due, perché con quattro giochi possiamo trovare qualunque distribuzione), allora è chiaro che la moda si colloca sempre al primo lancio (quindi valore 2), mentre la mediana sarà anch'essa pari a 2 (se al primo lancio escono $2^n/2$ o più) oppure pari a 4 (se al primo lancio escono meno di $2^n/2$).

16. Una aggiunta alla formula di Feller

Supponiamo di provare per 32 volte il gioco di S. Pietroburgo. E supponiamo che gli esiti si distribuiscano secondo le probabilità a priori; 16 volte uscirà "testa" al primo lancio, 8 al secondo, 4 al terzo, 2 al quarto e 1 al quinto (32 è infatti 2^5). Ma ci accorgiamo che 16+8+4+2+1 = 31, non 32. Manca un gioco (Pianca 2007), che, sempre seguendo le probabilità a priori, può uscire al sesto lancio con probabilità 50%, al settimo con probabilità 25%, e così via[61]. La stessa cosa se partiamo da 64, o da qualunque numero della serie 2^n, con *n* numero intero. Il valore medio è dato dalla formula generale $VM = n2^n/(2^n-1)$. Come si può notare *VM* converge piuttosto rapidamente ad *n*.
Riprendendo l'esempio, $5x2^5/(2^5-1)$ = 5,1612. Se il trentaduesimo gioco esce al sesto lancio, il valore medio sale a 7. Se esce al settimo lancio, il valore medio sale a 9, se esce al decimo a 13, aumentando via via secondo la progressione 2, 4, 8, 16…..poiché il contributo dato al valore medio è $2^{n+1}/2^n$ al lancio *n+1*, $2^{n+2}/2^n$ se esce al lancio *n+2*, e così via. Pertanto la formula di Feller, quando *n* tende a infinito, va modificata: $VM = n +0{,}5x2 + 0{,}25x4 +$ …. Sembra ripresentarsi quindi il valore infinito anche nell'ipotesi che la distribuzione segua la probabilità a priori, con un *n* finito. Anche Pianca (2007) pare adombrare lo stesso concetto[62]: "This game could of course terminate at any term from k+1 to infinity"; tuttavia aggiunge: "but additional term beyond the kth term requires an additional flip. Therefore, the probability of the game continuing reduces by half for each term beyond the kth term. Thus the probability that all M games terminate by the k + 1 flip is 0.5, the probability of all M games terminate by the k + 2 flip is 0.75, the probability of all M games terminate by the k+3 flip is 0.875, and by the k+4 flip is 0.9375; and so on". Ciò è certamente giusto, ma questa è appunto la caratteristica del gioco di S. Pietroburgo.
Non è detto poi che il numero dei giochi sia un multiplo di 2. Ad esempio si può decidere di giocare 100 volte[63]; in questo caso, secondo le probabilità

[61] Mentre con il quinto lancio la probabilità a priori è 3,125% che moltiplicata per 32 dà esattamente 1, al sesto lancio la probabilità 1,5625% dà 0,5. Ma un gioco non può uscire mezza volta, quindi che esca "testa" al sesto lancio ha una probabilità del 50%.
[62] Invece della lettera n Pianca usa k.
[63] Anche 100 può essere espresso come 2^n, con *n* che contiene un congruo numero di decimali. Ad esempio $2^{6,65}$ = 100,4.

a priori, "testa" uscirebbe 50 volte al primo lancio, 25 al secondo. Al terzo però "testa" non può uscire 12,5 volte, o al quarto 6,25 volte[64]. Se arrotondiamo all'unità per eccesso o per difetto, al sesto lancio abbiamo raggiunto 99 giochi, con una media di 6,3. "Testa" ha la probabilità 78,13% di uscire al settimo lancio (media 7,5), 39,06% all'ottavo (media 8,8) 19,53% al nono (media 11,36), 9,77% al decimo (media 16,48). L'aumento della media è quindi simile a quella che si ha quando i giochi sono un multiplo esatto di 2. Le stesse percentuali valgono per tutti i multipli di 100. Invece con un altro numero di giochi le percentuali saranno diverse. Ad esempio con 150 giochi (e multipli) il centocinquantesimo avrà una distribuzione di probabilità di questo tipo: 58,59%, 29,30%, 14,65% ecc…
Avremo quindi distribuzioni di probabilità diverse, e solamente i giochi 2^n (n intero) hanno una distribuzione dell'ultimo gioco del tipo 50%, 25%, 12,5% ecc…. Questa correzione della formula di Feller può essere vista o come volta a stabilire il prezzo equo secondo la legge dei grandi numeri (quando n tende ad infinito) o come studio del prezzo equo nell'ipotesi che i giochi seguano la distribuzione di probabilità a priori.

17. Cosa conviene a Paul e Peter?

Da quanto detto sinora la conclusione che si può trarre è che nessuna casa da gioco offrirà mai[65] il gioco di S. Pietroburgo, come giustamente aveva affermato Samuelson (1977).
Supponiamo che Paul (giocatore) e Peter (banco) decidono di provare il gioco di S. Pietroburgo e devono stabilire il numero dei giochi (uno solo come nel classico problema di Nicholas Bernoulli, o più volte) e anche se limitare il numero dei lanci di ciascun gioco.
Nel caso di un solo gioco, con o senza limite di lanci, ci troviamo nel classico problema che ha dato origine al paradosso, e sappiamo che vi sono molti argomenti (nonché esperimenti) volti a sostenere che Paul offrirebbe somme molto ridotte, che probabilmente Peter non considererebbe sufficienti ad accettare il rischio del banco.
Se invece Paul e Peter, che hanno quanto meno letto Feller, decidono di abbandonare l'alea connessa ad un solo gioco, possono convenire su un numero sufficiente di giochi in modo da far operare le leggi della probabilità, per ottenere cioè una distribuzione dei giochi secondo le probabilità a priori. Tuttavia fissare il prezzo di ciascun gioco in base a n, dove 2^n è il numero di giochi stabilito, espone entrambi, ma soprattutto

---

[64] Naturalmente se ripetiamo numerose volte i 100 giochi, al terzo lancio la distribuzione tenderà a distribuirsi in pari numero tra 12 e 13, mentre al quarto i 6 saranno più dei 7.

[65] Caso mai due studiosi che conoscono il paradosso e sono amanti del gioco potrebbero divertirsi a indovinare il numero esatto della moda o della mediana di un certo numero di giochi; ma solo quelli più amanti del rischio potrebbero cimentarsi con la media.

Peter, a rischi molto alti. Klyve e Lauren (2011) hanno effettuato varie prove a partire da 1.000 per finire ad un milione di giochi.

Numero di giochi	vincita media	premio teorico		scarto%
1000	7.80	9,97		-22
2048	18.70	11		+70
50000	15.60	15,61		-0,000641
100000	21.15	16,61	“	+27,3
500000	19.46	18,93………….”		+2,8%
1000000	25.69……..	19,93 ………..”		+28,9%

Come si vede, eccettuato il primo (1000 giochi) ed il terzo (50.000 giochi) in tutti gli altri la vincita media è stata nettamente maggiore di quella teorica, con conseguenti perdite fallimentari per Peter[66].
Quali sono le cause di queste differenze tra il risultato empirico e la previsione teorica? Ovviamente non è detto che una simulazione segua con precisione la distribuzione data dalle probabilità a priori. Ci si può chiedere se il risultato empirico si discosti significativamente dalla distribuzione a priori, per esempio con esiti al quarto lancio maggiori rispetto al terzo, oppure se siano in particolare gli ultimi esiti, o proprio l'ultimo (quello cioè con il maggior numero di lanci), a determinare lo scostamento tra la media empirica e quella teorica.
Prendiamo il caso di 100.000 giochi. Il risultato di 21,15 può essere scaturito dalla seguente distribuzione, che come si vede è molto vicina alla distribuzione secondo le probabilità teoriche:

	distribuzione empirica	distribuzione teorica
1°	50.000	50.000
2°	25.000	25.000
3°	12500	12500
4°	6.252	6.250
5°	3.126	3.126
6°	1.562	1.563
7°	782	781
8°	391	391
9°	194	195
10°	99	98
11°	48	49
12°	24	24
13°	10	12
14°	7	6

[66] Paul avrebbe perso 2170 euro nel primo caso, e circa 500 nel terzo. Ma Peter, anche nel caso di mezzo milione di giochi, con una differenza ridotta (2,8%), avrebbe comunque perso 265.000 euro.

15°	2	3
16°	2	2
17°	0	1
18°	0	1
19°	1	0

Come si può notare, il risultato deriva dal fatto che il centomillesimo gioco non è uscito al 17° lancio (con probabilità 76,4%) ma al 19° lancio (con probabilità 19,1%). Dunque si può dire che il premio ottenuto da Klyve e Lauren è un'applicazione della formula modificata di Feller:
VM = $n2^n/(2^n-1)$, con l'aggiunta del contributo medio del gioco uscito al 19° lancio[67].
E' plausibile quindi che i risultati con il maggiore scarto ottenuti dai due autori siano dovuti non tanto al fatto che la distribuzione nei vari lanci non rispecchia perfettamente le probabilità a priori, quanto soprattutto al fatto che l'ultimo gioco avviene non al lancio n+1 ma ad un lancio più alto.
Così la ripetizione di Buffon (2048 giochi) rispecchiando la distribuzione teorica porterebbe al risultato medio di 11, con l'aggiunta di 2 nel caso in cui l'ultimo gioco esca al 12° lancio, 4 al 13°, 8 al 14° lancio. Quest'ultimo è quello che sembra essere accaduto a Klyve e Lauren. In questo caso infatti, supponendo che tutti gli altri seguano la distribuzione a priori, si ottiene una media di 19, che è molto vicina al quella di 18,93 di Klyve e Lauren[68].
I due autori tornano sull'esercizio di Buffon, che aveva stimolato la loro curiosità sul problema di S. Pietroburgo. "As an answer our original question, we return to Buffon's results. Recall that he gave $9.82 as a good approximation to the expected value of the St. Petersburg game. Our data show that only 9.06% of Buffon experiments have an average payout of less than $10. The mean "average payout" was $19.60, and the median was $12.63. Therefore Buffon's empirical value, the one often reported in histories of the subject, is, in fact, fairly unlikely. (Indeed, we now wonder whether Buffon or his accomplice cheated. Perhaps he played a single game of large payout, but ignored it as unlikely and unrepresentative of what "should" happen.)".
E' ovviamente possibile che la congettura dei due autori sia giusta (non è possibile nessuna prova né a favore né contro). Ricordando che gli ultimi sei giochi di Buffon terminano al nono lancio (lanci effettuati dal ragazzo),

---

[67] E' anche possibile ottenere 21,15 (esattamente 21,1541) con scostamenti leggermente più ampi (soprattutto dal 10° lancio in poi) e due giochi al 16° lancio. Ma la distribuzione nel testo è quella più vicina a 21,15 (esattamente 21,1504).

[68] Lo scarto di 0,07 dipende da quattro giochi in più usciti al primo lancio (uno in meno al quarto e sesto, due in meno al quinto). Da notare che questo fatto di per sé avrebbe diminuito il risultato medio. Ma il gioco uscito al 14° lancio ha più che compensato.

si provi ad immaginare l'ipotesi in cui al nono lancio escano tre giochi, al decimo due e all'undicesimo uno. In questo caso il payoff medio sarebbe proprio di 11, invece che il 9,92 di Buffon[69]. Ora il payoff medio nell'intorno di 11 (10,5-11,5) è proprio quello modale che si trova quando si effettua la simulazione MC. Ed in effetti si trova una media più alta, a testimonianza della caratteristica distribuzione asimmetrica che si trova nelle simulazioni del gioco di S. Pietroburgo[70].

Nel caso di giochi ripetuti dunque è difficile che Paul e Peter possano trovare un prezzo medio per gioco che non esponga una delle due parti ad un rischio molto elevato di perdita (anche catastrofica[71]). Se si prende a riferimento il prezzo dato da *n*, il numero al quale si eleva 2, il rischio maggiore grava su Peter, dato che, se è vero che in una ipotetica ripetizione MC del gioco la moda si colloca nell'intorno di *n*, è vero anche che essa rappresenta una percentuale piuttosto bassa della distribuzione completa di risultati[72], mentre la somma delle percentuali con payoff più alta costituisce la netta maggioranza. Peter quindi è esposto ad un rischio maggiore di Paul, anche se anche quest'ultimo non ne è esente.

Supponiamo invece che, allo scopo di ridurre il rischio di Peter, i due si siano accordati per un certo numero di giochi con limite massimo a 10 lanci, e che debbano accordarsi per regolare il dare e avere [73]. Quale ragionamento possono seguire, prima del gioco, per fissare il prezzo (medio) per gioco? Se il valore atteso di un gioco, a causa del vincolo al numero massimo di lanci, è 11, si può pensare che, con un numero di giochi pari o superiore a 2^{11}, la distribuzione si addensi intorno ad 11, come si è visto in precedenza (*par. 11*, *una nota su Condorcet)*.

Se invece il numero di giochi è inferiore a 2^{11}, ad esempio 128 (2^7), allora il prezzo equo non dovrebbe essere 11 ma 7. Ma anche nell'ipotesi in cui la scommessa consista in solo 128 giochi, con il limite di 10 lanci, Peter

---

[69] Si ricorda che Buffon partiva da un premio di 1 al primo lancio, non da 2.

[70] Anche Vivian (2013) simula 2^{28} giochi e trova una media di 34,04. Lo scarto percentuale rispetto a 28 è +21,6%. La distribuzione mostra che gli scarti rispetto alle probabilità a priori diventano significativi dopo il diciottesimo lancio. Da notare che è in particolare un addensamento di giochi al 26esimo lancio (32 contro 4 teorici) che determina una media più alta di 4 punti, supponendo che l'ultimo gioco esca al 29° lancio, quando la probabilità è del 50%, con media pari a 30 (vedi par. 16). Una peculiarità è anche data dal fatto che nessun gioco termina al 25° lancio, contro ben 32 al 26°.

[71] Quando il numero dei giochi è alto, e il dare-avere tra Paul e Peter viene saldato ad ogni gioco, è possibile che uno dei due si trovi ad aver esaurito le disponibilità (Allais 1979).

[72] A meno che il numero di giochi non sia molto ridotto, ad esempio da 4 a 10 (si veda Olivero 2013). In questo caso il valore modale si colloca a percentuali elevate.

[73] Se non vi fosse il limite di dieci lanci, il prezzo equo alla Feller dovrebbe essere (poco meno di) 17, più 0,5x2, 0,25x4 ecc…..

sarebbe molto incauto ad accettare un prezzo equo di 7, perché, come si vede dalla distribuzione *3)* (*par. 14*), la probabilità di essere intorno alla parità sarebbe solo del 16,2%, quella di vincere del 14,4% e quella di perdere ben 69,4%. Infatti anche con il limite di dieci lanci la distribuzione MC presenta sempre la caratteristica di asimmetria sulla destra.

18. St. Petersburg e il valore delle growth stocks

Nel 1954, un periodo nel quale il valore delle azioni negli USA cresceva rapidamente, due autori (Clendenin - Van Cleave 1954) posero il problema di quale fosse un ragionevole prezzo per le azioni delle imprese i cui profitti (e dividendi) crescessero significativamente sopra la media (denominati growth stocks). Se i dividendi di un'impresa crescono ad un tasso più alto del tasso di sconto, portando all'infinito questa ipotesi dovrebbe derivarne un prezzo infinito per le azioni. "We have not yet seen any growth stocks marketed at the price of infinity dollars per share, but we shall hereafter be watching".
Ovviamente due soluzioni al problema consistono nel negare la possibilità di una crescita in perpetuo dei profitti ad un tasso maggiore del tasso di sconto, oppure lasciare questa ipotesi ma applicare un tasso di sconto crescente quanto più si considerano profitti lontani nel tempo. Tre anni dopo David Durant (1957) notava come il tema sollevato dai due autori presentasse una rimarchevole analogia con il paradosso di S. Pietroburgo. Durant propone di generalizzare le probabilità di 1/2 ad ogni lancio con la probabilità $1/(1+i)$ di ottenere "croce"[74], ed un tasso di crescita del premio pari a $1+g$, dove sia i che g non sono necessariamente pari all'unità. Una seconda e più significativa modifica consiste nel premio: invece di essere pari a 2^n quando "testa" esce con n lanci, il premio sarà la cumulata di D, se al primo lancio esce "croce", D + D(1+g) se "croce" esce anche al secondo lancio, e così via, fino a che non esce "testa". La sommatoria dei possibili esiti assume quindi la forma

$$D/(1+i) + D(1+g)/(1+i)^2 + D(1+g)^2/(1+i)^3 + \ldots \qquad (1)$$

che, sottolinea Durand, si presenta come una serie aritmeticamente equivalente a una serie di dividendi che crescono ad un tasso g e che vengono scontati al tasso i. E' immediato rendersi conto che se il tasso di crescita dei dividendi è pari o maggiore del tasso di sconto la serie tende ad infinito.
Possiamo riscrivere la (1) mettendo in evidenza 1/(1+i),

$$(1/(1+i))D(1+ (1+g)/(1+i) + (1+g)^2/(1+i)^2 + \ldots) \qquad (2)$$

[74] Ovviamente la probabilità di ottenere "testa" è i/(1+i).

e notare che se poniamo *i=g=1* e *D=2,* abbiamo il gioco di S. Pietroburgo nella sua tipica forma moderna[75].
Rimane evidentemente una diversità, come nota Durand, tra il caso in cui la (1) o la (2) rappresentino un flusso monetario che si protrae nel tempo, possibilmente all'infinito, e il caso di un gioco (modificato) di S. Pietroburgo, che in realtà impiega un tempo brevissimo, soprattutto ora che lo si può giocare con un calcolatore[76]. Tuttavia l'ipotesi di un tasso crescente di sconto può considerarsi come l'equivalente dell'ipotesi di una diminuzione delle probabilità molto basse secondo la NEU (si veda il par. 8), o l'idea che un'impresa non viva per sempre sia simile a quella che nega che il gioco possa durare per sempre[77].
La conclusione, che Durand trae dal suo parallelo tra il valore delle growth stocks e il gioco di S. Pietroburgo, è che così come è difficile poter attribuire un prezzo "equo" a quest'ultimo, così è altrettanto difficile poter dare un prezzo "equo", cioè ragionevole, alle azioni di una impresa che sta attraversando un periodo di crescita elevata. Dopo molti decenni il suo contributo è stato ripreso da alcuni lavori (Székely-Richards 2004, Libor 2011) che hanno sostenuto la tesi per cui la conoscenza del paradosso di S. Pietroburgo avrebbe potuto aiutare gli investitori a non cadere vittime delle bolle speculative, come quella delle azioni high-tech del 2000 o quelle dei derivati del 2008[78].
L'argomento è sostanzialmente il seguente: il gioco di S. Pietroburgo insegna a diffidare del miraggio di altissime vincite (con bassissime probabilità), e pertanto, se ben compreso, dovrebbe insegnare a diffidare da facili guadagni durante le bolle finanziarie. In realtà la storia di tutte le bolle (compresa quella olandese dei bulbi di tulipano) presenta la caratteristica che comprando e rivendendo, a breve termine, o al limite per intervalli molto brevi di tempo, i titoli oggetto della bolla si ottengono ottimi guadagni, fino al momento in cui la bolla scoppia. Siamo piuttosto lontani dal caso di un guadagno altissimo con probabilità bassissima; si può ipotizzare che le stesse persone coinvolte nelle bolle non offrirebbero che poche monete nel caso del gioco di S. Pietroburgo; ma esse non

---

[75] Per avere quella originale basta porre D=1. Da notare che siamo in una situazione opposta alle martingale, o giochi al raddoppio, che tante perdite hanno causato agli appassionati della roulette.

[76] Nella nota 4, p. 350, dopo aver notato che il tasso di sconto incorpora sia il premio per il rischio che quello per l'attesa, Durand propone di considerare che "the growth rate *g* in (1) would represent the real growth rate less an adjustment for waiting, and *i* would represent only the risk of termination".

[77] "Peter and Paul are mortal; so, after a misspent youth, a dissipated middle age, and a dissolute dotage, one of them will die, and the game will cease, heads or no heads" (p. 352).

[78] Eisdoefer-Giaccotto (2015) propongono un parallelo tra un processo di crescita dei dividendi mean reverting, con applicazione del modello Capital Asset Pricing, mostrando l'analogia con il gioco di S. Pietroburgo.

resistono alla prospettiva di un guadagno facile, del quale viene sottovalutato il rischio.

19. Conclusioni

Riprendiamo l'esempio di Huygens, citato all'inizio. Peter presenta a Paul due buste[79], una con tre ed uno con sette euro; cinque è il prezzo equo per il diritto di scegliere. Lo è in due sensi: dopo la scelta l'uno guadagnerà e l'altro perderà due euro; le probabilità sono uguale al 50%. Ma di equità si può parlare anche in un altro senso: se ripetiamo numerose volte il gioco, ognuno al prezzo di cinque euro, alla lunga (legge dei grandi numeri) vincite e perdite si compenseranno, perché la distribuzione – tre e sette euro – tenderà sempre più al 50%.
Appena prendiamo in considerazione il gioco di S. Pietroburgo ci rendiamo conto che non possiamo applicare il ragionamento appena fatto. Nell'ipotesi di un solo gioco, qualunque sia il prezzo fissato, che ovviamente non può che essere un valore finito, guadagno e perdita non possono essere simmetrici. Può accadere solo per caso che, avendo fissato il prezzo, ad esempio, a quattro o ad otto euro, il gioco finisca al secondo o al terzo lancio, e quindi che payoff e prezzo del gioco risultino uguali. Leonard Savage (1954), proprio con riferimento al paradosso di S. Pietroburgo, giunge alla conclusione che non in ogni caso il valore atteso va considerato come l'aspetto più rilevante in un problema probabilistico.
Anche se in teoria il teorema del limite centrale (e la connessa legge dei grandi numeri) si applica a distribuzioni con varianza finita, come si è visto nel par. 10, Feller ottenne che quando il numero dei giochi (2^n) cresce senza limiti, il prezzo equo tende ad *n*. Il problema è quanto grande deve essere *n*; come si è visto anche con milioni di giochi i payoff medi possono discostarsi significativamente da *n*, anche se è vero che al crescere del numero dei giochi i payoff medi crescono, e che la distribuzione degli esiti ai vari lanci segue, grosso modo, la distribuzione delle probabilità a priori.
Ma quanto grande deve essere *n* perché gli scarti del payoff medio rispetto ad *n* siano trascurabili? Vivian (vedi nota 71) ha sperimentato oltre 268 milioni di giochi (2^{28}) ottenendo un payoff più alto di 30 (cioè 28 più 2 se l'ultimo gioco esce al 29° lancio, con probabilità del 50%), e si è visto che ciò deriva da un anomalo addensamento al 26° lancio. Se qualche studente di statistica volesse cimentarsi in una iterazione MC della simulazione di Vivian, troverebbe, con tutta probabilità, un addensamento intorno ai payoff tra 28 e 30, ma una media generale più alta, dato che la distribuzione dei payoff sarebbe asimmetrica sulla destra.
Con l'avvento dei personal computer il problema del tempo necessario per i lanci è stato risolto, e non si va lontano dal vero affermando che il gioco

[79] Le buste sono una variante rispetto all'esempio di Huygens, solo per anticipare il tema delle two envelopes paradox, che segue in appendice.

di S. Pietroburgo sia stato complessivamente simulato centinaia di miliardi di volte[80]. Non è mai accaduto che un gioco durasse in eterno; in effetti secondo Neugebauer (2010) il gioco che ha avuto più lanci è stato uno con 29 lanci.
Il paradosso di S. Pietroburgo continua a sollecitare l'attenzione degli studiosi, siano essi matematico-statistici, psicologi, neuro-economisti, fisici. E' evidente che l'interesse si è allargato nel tempo dagli studiosi di probabilità agli economisti prima e a tutti gli altri successivamente. La cosa meno rilevante è in effetti se si possa o meno parlare di paradosso. L'influenza del gioco di S. Pietroburgo si può notare anche dal fatto che un filosofo (Chalmers 2002) ha unito il gioco di S. Pietroburgo con il c.d. "two-envelope paradox", in modo da considerare due paradossi in un solo articolo. Peccato però che il two-envelope paradox non ha la stessa stoffa di quello di S. Pietroburgo, e più che essere un paradosso somiglia ad un gioco di prestigio, sul quale è sorprendente come si sia sviluppata una copiosa letteratura (Wikipedia 2013).

20. Appendice: le due buste

Vi sono due buste che Peter presenta a Paul; in una c'è una certa somma e nell'altra il doppio. Dopo che Paul ha scelto, Peter gli chiede se vuole cambiare la sua scelta. Non ci sarebbe nessuna ragione per cambiare, ma il seguente ragionamento sembra suggerire il contrario: sia A la somma nella busta scelta da Paul. Nell'altra busta vi è una eguale probabilità che vi sia o 2A oppure A/2. Il valore atteso dell'altra busta è quindi 0,5(2A) + 0,5(A/2) = A5/4. Quindi Paul dovrebbe passare all'altra busta, ma lo stesso ragionamento si potrebbe fare al contrario; dunque abbiamo un paradosso.
Il "trucco" è che nel ragionamento si fanno comparire non due valori monetari, ma tre: 2A, A, A/2, in cui il secondo è la metà del primo ed il terzo la metà del secondo. Ma i valori sono solo due; se X è il valore più basso, allora 2X è il più alto. Se Y è il valore più alto allora Y/2 è quello più basso (ovviamente 2X=Y). Se ragioniamo in termini di X, il valore atteso di <u>ciascuna</u> delle due buste è 0,5X + 0,5(2X) = 1,5X. Se invece ragioniamo in termini di Y il valore atteso di <u>ciascuna</u> delle due buste è 0,5Y + 0,5Y/2 = 0,75Y. Ovviamente 1,5X = 0,75Y. Non c'è nessun paradosso è in questo caso il valore atteso, dal punto di vista statistico, è perfettamente valido.

[80] Ad esempio il solo Foley (2010), citato al par. 15, ha effettuato complessivamente 65, 5 miliardi di giochi di S. Pietroburgo.

Bibliografia

Aase, Knut (2001) On the St Petersburg paradox." *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 69-78.
d'Alembert, Jean Le Rond (1774) Réflexions sur le Calcul des Probabilités, *Opuscules Mathématiques*, Tome II, Memoire 10, Paris 1761-1780, pp. 1-25, 1764.
Akopian Aleksej (2011) St. Petersburg Paradox - a VaR approach, Master's Thesis, ETH Zurich.
Allais, Maurice (1979), The arbitrage between mathematical expectation and the probability of ruin and the St. Petersburg paradox," in Maurice Allais and Ole Hagen, eds., *Expected Utility and the Allais Paradox*. Dodrecht: D. Reidel, pp. 498- 506.
Arrow, Kenneth John (1951) "Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations." *Econometrica* 19, pp. 404-437.
Aumann, Robert (1977) The St. Petersburg paradox: A discussion of some recent comments." *Journal of Economic Theory* 14, pp. 443-445.
Bassett Gilbert (1987), The St. Petersburg paradox and bounded utility." *History of Political Economy* 19(4), pp. 517-523.
Bernoulli Daniel (1738), *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, Comentarii Academiae Scientarium Imperialis Petropolitanae V, 175-192; English translation 1954 by L. Sommer with footnotes by Karl Menger, Exposition of a new theory on the measurement of risk, *Econometrica* 22(1), pp. 23-36.
Bernstein, Peter (1996), *Against The Gods: the Remarkable Story of Risk,* **John Wiley & Sons**.
Blavatski Pavlo (2005)**,** Back to the St. Petersburg paradox?, *Management Science* 51 (4), pp. 677-678.
Bottom William-Bontempo Robert-David Holtgrave (1989), Experts, novices, and the St. Petersburg Paradox: Is one solution enough?." *Journal of Behavioral Decision Making* 2, pp. 113-121.
Buffon Georges-Louis Leclerc (1777), *Essai d'arithmétique morale*, Supplément a l'histoire naturelle IV, 1777.
Camerer Colin (2005), Three Cheers—Psychological. Theoretical, Empirical—for Loss Aversion." *Journal of Marketing Research ,* 42(2), pp. 129-134.
Ceasar Allan (1984), "A Monte Carlo Simulation Related to the St. Petersburg Paradox." *College Mathematical Journal*, 15 (4) pp. 399-342.
Clendenin John-Van Cleave Maurice (1954), Growth and Common Stock Values, *Journal of Finance*, IX, pp. 365-76-
Chalmers David (2002), The St. Petersburg Two-Envelope Paradox *Analysis 62:155-57.*
Cournot Augustin (1843), *Exposition de la théorie des chances et des probabilities*. Paris, L. Hachette, 1843.

Cox, James-Sadiraj Vjollca-Vogt Bodo. (2009) On the Empirical Relevance of St. Petersburg Lotteries," *Economics Bulletin*, Vol. 29(1), pp. 221-227.
Csörgő Sándor and Simons Gordon (1993-1994), On Steinhaus' Resolution of the St. Petersburg Paradox, *Probability and Mathematical Statistics*. 14, pp. 157–172.
Daston Lorraine (1988), *Classical Probability in the Enlightenment,* Princeton University Press.
Diaconis Persi-Holmes Susan-Montgomery Richard, Dynamic bias in the coin toss, *SIAM Review*, 49 (211) 2007.
Dudley-Silla David (1957), Growth Stocks and the Petersburg Paradox, *Journal of Finance* 12: pp. 348-63.
Durand David (1957), Growth Stocks and the Petersburg Paradox." *Journal of Finance* 12: pp. 348-63.
Dutka Jacques (1988), On the St. Petersburg paradox, *Archive History of Exact Sciences* 39, pp. 13-39.
Eisdoefer Assaf- Giaccotto Carmelo (2016), The St. Petersburg paradox and capital asset pricing, *Annals of Finance*, Vol. 12, Issue 1, pp 1–16.
Ergodos, Nick (2014), The Enigma of Probability, *Journal of Cognition and Neuroethics* 2 (1) : 37–71.
Feller William (1945), Note on the Law of Large Numbers and 'Fair' Games." *Annals of Mathematical Statistics.* 16, 301–304.
Feller William (1950), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol I, John Wiley, New York.
Fontaine Alexis (1764), *Solution d'un probleme sur les jeux de hazard,* Mémoires donnés à l'Academie Royal Des Sciences, pp. 429-431.
Gana Rajaram (2014), *Does the St. Petersburg Paradox cast doubt on the use of Expected Value Theory to approximate the random present value of a life annuity,* Working Paper, Georgetown University, Washington D.C.
Gorovitz Samuel. "The St. Petersburg paradox," in Maurice Allais, Ole Hagen (eds*.) Expected Utility and the Allais Paradox*,
Granger Gilles-Gaston (1956)- *La Mathématique sociale du Marquis de Condorcet,* Librairie Philosophique J. Vrin, Parigi.
Hey John-Neugebauer Tibor-Pasca Carmen (2010), introduzione alla traduzione in inglese degli *Essai d'arithmétique morale* di Buffon, LSF Research Working Series n. 10-06.
Hayden, Benjamin-Platt, Michael (2009) The Mean, the Median, and the St. Petersburg Paradox, *Judgment and Decision Making*, Vol. 4 (4), 256-272, 2009.
Jorland Gerard (1983), The Saint Petersburg Paradox, 1713-1937. In Michael Heidelberger, Lorenz Krüger, and Rosemarie Rheinwald (Eds.), *Probability since 1800,* Verlag, Bielefeld.
Kern Peter-Wedrich Lina (2014), Dimension Results related to the St. Petersburg Game, *Probability and Mathematical Statistics*, vol. 34, fasc. I, pp. 97-117.

Kahneman Daniel-Tversky Amos (1979), Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk, *Econometrica* 47(2), 1979, pp. 263-291.
Keynes John M. *A Treatise on Probability*. London: MacMillan and Co. 1921.
Kroll, Eike Benjamin and Vogt, Bodo (2009), *The Petersburg Paradox Despite Risk-Seeking Preferences: An Experimental Study* FEMM Working Paper No. 4, January 2009.
Libor Jozsefner (2011), Financial and Economic Aspects of St. Petersburg Paradox, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, vol. 3, n. 3, pp. 211-220.
Lopes Lola (1981) "Decision making in the short run." *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 7, pp. 377-385, 1981 .
Lopes Lola (2013), *Goals and the Organization of Choice Under Risk , draft 4 april 2013.*
Martin-Löf Anders (1985), A Limit Theorem Which Clarifies the 'Petersburg Paradox." *Journal of Applied Probability*, 22, pp. 634–643.
Marshall, Alfred. *Principles of Economics* London: Macmillan and Co., Ltd., 1890.
Menger Karl (1934), Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre." *Zeitschrift der Nationalökonomie* 51, pp. 459-485. English translation by Wolfgang Schoellkopf with assistance of W. Giles Mellon, *The role of uncertainty in economics*, Chapter 16 in *Essays in mathematical economics* in honor of Oskar Morgenstern, Princeton University Press, pp. 211-232, 1967.
Neugebauer Tibor (2010), *Moral Impossibility in the Petersburg Paradox: A Literature Survey and Experimental Evidence*, LSF Research Working Paper, Luxembourg School of Finance.
al Nowaihi Ali-Dhami Sanjit-Zhu Jia (2015), *Rank dependent expected utility theory explains the St. Petersburg paradox*, University of Leicester, working Paper 15/22.
Olivero Alexander (2016), *A Computational And Theoretical Exploration of the St. Petersburg Paradox*, Undergraduate Honors Thesis Collection, Paper 317, Butler University.
Paladini Ruggero (2014), *Da Bentham alla tassazione ottimale*, Public Finance Research Paper n. 2, Istituto di Economia e Finanza, Sezione del DIGEF, Sapienza Università di Roma.
Pfiffelman Marie (2011) Solving the St. Petersburg Paradox in cumulative prospect theory; the right amount of probability weighting, *Theory and Decision* 71 (3)pp. 325-341.
Pianca Paolo (2007) *The St. Petersburg Paradox: Historical Exposition, an Application to Growth Stocks and Some Simulation Approaches,* Quaderno di Didattica n. 24, Department of Applied Mathematics, University of Venice.
Prelec, Drazen (1998), The probability weighting function, *Econometrica,* Vol. 66, No. 3, pp. 497-527.

Pulskamp Richard, *Correspondence of Nicolas Bernoulli concerning the St. Petersburg Game,* Department of Mathematics & Computer Science, Xavier University, Cincinnati, OH. January 1, 2013.
Rieger Marc and Wang Mei (2006), Cumulative prospect theory and the St. Petersburg paradox." *Economic Theory.* 28(3), pp. 665-679.
Rodriguez Ricardo (2006), Finite sequences of St. Petersburg games: inferences from a simulation study, *Journal of Statistical Computation and Simulation* vol. 76 n. 10 pp. 925-933.
Samuelson Paul (1952), Probability, Utility, and the Independence Axiom, *Econometrica*
Vol. 20, No. 4, pp. 670-678.
Samuelson Paul (1977), St. Petersburg Paradoxes: Defanged, Dissected and Historically Described." *Journal of Economic Literature.* 15(1), pp. 24-55, 1977.
Sandifer Ed (2004), How Euler did it – St. Petersburg Paradox." Internet resource.
Senetti John (1976), On Bernoulli, Sharpe, financial risk, and the St. Petersburg paradox." *Journal of Finance* 31, pp. 960-962, 1976.
Shafer, Glenn (1988), The St. Petersburg paradox. In Samuel Kotz and Norman L. Johnson, eds., *Encyclopedia of statistical sciences* 8, pp. 865-870.
Shapley, Lloyd. S. "The Petersburg Paradox – A con game ?" *Journal of Economic Theory* 14, pp. 439-442, 1977.
Székely Gabor-Richards Donald (2004), The St. Petersburg paradox and the crash of high-tech stocks in 2000", *The American Statistician* 58, pp. 225-31.
Todhunter, Isaac (1865), *Mathematical theory of probability – From the time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge and London, MacMillan and Co.
Treisman, Michel (1983), A solution to the Petersburg paradox." *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 9, pp. 224-227.
Villani Cédric (2012), *Théorème vivant*, Grasset, Parigi.
Vivian Robert William (2004), Simulating Daniel Bernoulli's St. Petersburg game: Theoretical and empirical consistency, *Simulation & Gaming*. Vol. 35(4), pp. 499-504.
Vivian Robert (2013), *Ending the mith of the St. Petersburg paradox,* MPRA Paper n. 50515, University of Witwatersrand.
Wikipedia (2013), *Two envelopes problem.*
Yaari Menahem (1987), The dual Theory of Choice under Risk, *Econometrica* v. 55 n.1pp. 95-115.

http://www.digef.uniroma1.it/pubblicazioni

Contact: e-pfrp@uniroma1.it

E-PFRP N. 29

2017